17. XII. 2012

1. wprowadzenie do teorii Γ- zbieżności (Γ- convergence)

Def: (X,d) - prz. metryczna, $F_n, F: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Mówimy, że $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ jeśli:

1. $\forall x_n \to x$, $F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n)$ [liminf inequality]

2. $\forall x \in X$ $\exists x_n \to x$ $F(x) \geq \limsup F_n(x_n)$ [limsup inequality]

Równoważnie

2'. $\forall x \in X$ $\exists x_n \to x$ $\lim F_n(x_n) = F(x)$ [recovery sequence]

Fakt: Niech $\{F_n\}$ będzie ciągiem stałym. $F_1 = F_2 = F_3 = \ldots = F_n = \ldots = F$

$F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ $\Leftrightarrow$ F jest półciągła z dołu

D-d:
„$\Rightarrow$" oczywiste

„$\Leftarrow$" 1. jest oczywiste

2. Gdy $x \in X$ bierzemy $x_n = x$ i wtedy $F_n(x_n) = F(x) \to F(x)$. ∎

Przykład: Gamma zbieżność nie ma prawie nic wspólnego ze zbieżnością punktową.

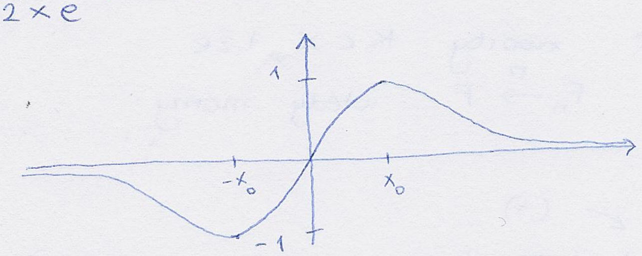
Ale zanim

Fakt: Jeśli $F_n \overset{\text{loc jedn.}}{\rightrightarrows} F$ oraz F jest półciągła z dołu, to $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$.

D-d: Zadanie.

Powrót do przykładu(1a) $F_n, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_n(x) = F_1(nx)$,

$F_1(x) = \sqrt{2}\, x\, e^{-(2x^2-1)/2}$



$F_n \xrightarrow{\text{punktowo}} 0$, $F_n \rightrightarrows 0$
$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ loc. jedn.

$$F_n \xrightarrow{\Gamma} \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{n}(-x_0) \to 0$$

$$F_n(x_n) = F_1(-x_0) = -1 \to -1$$

Zad. Γ granica jest jednoznaczna

Przykład 1b:

$\{-F_n\} \xrightarrow{\Gamma} F$

widzimy, że : $\Gamma \lim (\alpha F_n) \neq \alpha \Gamma \lim F_n$

$\Gamma \lim (F_n + G_n) \neq \Gamma \lim F_n + \Gamma \lim G_n$

Fakt: Jeśli G jest ciągła, to $\Gamma \lim (F_n + G) = (\Gamma \lim F_n) + G$

Przykład: $F_n(x) = -\cos(nx)$, ten ciąg nie ma żadnego podciągu zbiegającego punktowo.

Natomiast $F_n \xrightarrow{\Gamma} -1$

[liminf ineq.] oczywiste

[recovery seq.] $x \in \mathbb{R}$, $x_n = \frac{[nx/2\pi] \cdot 2\pi}{n}$, $F_n(x_n) = -1$

Uwaga: słaba granica tego ciągu, to 0.

Przykład:

$$F_j(x) = (-1)^j \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x \notin \mathbb{Q} \text{ albo } x = \frac{k}{n}, \text{ gdzie } n \in \{1, \dots, j\} \\ -1 & \text{przeciwnie} \end{cases}$$

$\Uparrow$ $F_j \to 0$ punktowo, ale Γ-lim nie istnieje w żadnym punkcie.

Twierdzenie: Załóżmy, że istnieje zbiór zwarty $K \subset X$, t.że $\forall_n \inf_X F_n = \inf_K F_n$. Załóżmy, że $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$. wtedy mamy:

(i) F ma minimum w K

(ii) Jeśli $x_n \in K$ $|F_n(x_n) - \inf_X F_n| \to 0$ (*) (approximate minimizers), to wtedy $x_n \to x$ (podciąg), $x \in \operatorname{argmin} F$

(iii) $\forall x \in \operatorname{argmin} F$ $\exists x_n \to x$ app. min. dla F.

Dowód: weźmy $\{x_n\} \in K$ t. że $(*)$, $x_n \to x \in K$ (podciąg)

$$F(x) \underset{(i)}{\leq} \liminf F_n(x_n) = \liminf (\inf_X F_n)$$

weźmy $y \in X$, weźmy recovery sequence $y_n \to y$

$$F_n(y_n) \to F(y)$$

Pokazaliśmy (i) i (ii). Teraz pokażemy (iii). Jeśli weźmiemy $y = x$ w powyższej nierówności:

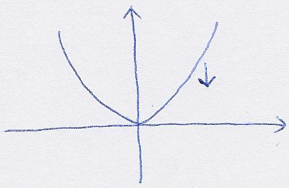
$$\lim (\inf F_n) = \inf F = \min F.$$

weźmy $y \in \operatorname{argmin} F$, $y_n \to y$ (recovery sequence):

$F_n(y_n) \to F(y) \Rightarrow |F_n(y_n) - \inf F_n| \to 0$, więc

$\{y_n\}$ jest app. min.

Uwaga - przykład: $F_n = \frac{1}{n} x^2$



$$F_n \xrightarrow{\Gamma} 0$$

$$\arg\min F_n = \{0\}$$

Przykłady:

I Homogenization: opis asymptotyczny problemów o coraz większej oscylacji

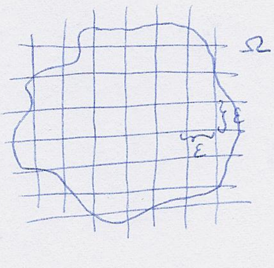
II Gradient theory of phase transitions: (dla płynów jednorodnych, izotermicznych w $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ogr)

III Dimension reduction = teorie asymptotyczne płyt, prętów (plates, shells, rods, beams).

Ad I. Niech $a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją 1-periodyczną, tzn

$$a(x + e_k) = a(x) \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\}$$

Rozważmy przewodnictwo cieplne na obszarze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, zadane przez $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, wtedy temperatura



$u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ rozwiązuje nast. problem:

$$\min \left\{ \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\nabla u|^2 - 2 \int_\Omega f u \, dx ,\ u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

źródło

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) |\nabla u|^2 - 2 \int_\Omega f u \, dx$$

Równania Eulera - Lagrange'a dla F_ε:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_j u \right) = f & w\ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Okazuje się, że $u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\approx} u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, gdzie funkcja u_1 jest rozwiązaniem

$$\min \left\{ F(u) = \int_\Omega \langle A \nabla u, \nabla u \rangle - 2\int_\Omega fu \; ; \; u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

A – stała macierz (homogenization coefficients)

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$$

<u>Przykład:</u> $n = 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega = [0,1]$, wtedy

$$A = \hat{a} = \left(\int_0^1 \frac{1}{a(s)} ds \right)^{-1} \text{ - harmonic mean}$$

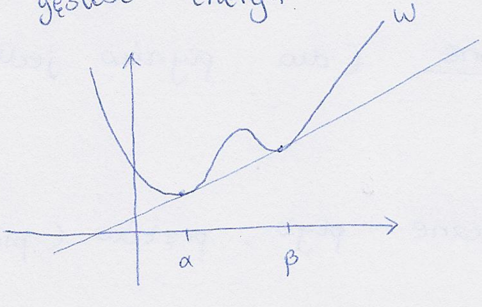
$$\neq$$

$$\int_0^1 a(s)\, ds$$

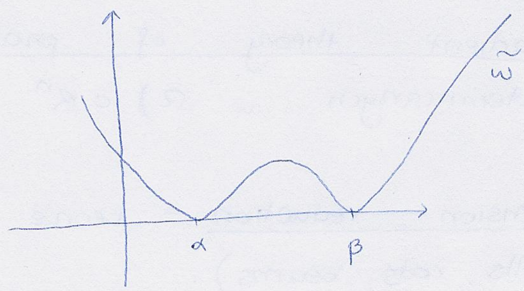
<u>Ad II.</u> Rozważamy problem

$$\min \left\{ \int_\Omega W(u), \int_\Omega u = C \right\}, \quad u: \Omega \to [0,1] \text{ gęstość}$$

W – gęstość energii



$\rightsquigarrow$



możemy $\tilde{W}(u) := W(u) + C_1 u + C_2$

$$\int \tilde{W}(u) = \int W(u) + \underbrace{C_1 C + C_2 |\Omega|}_{\text{const.}}$$

$$\min \left\{ \int_\Omega W(u) + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^2, \int_\Omega u = C \right\}$$

$$\Leftrightarrow \min \left\{ \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int W(u) + \varepsilon \cdot \int_\Omega |\nabla u|^2}_{F_\varepsilon(u)}, \int_\Omega u = C \right\}$$

Okazuje się, że $\underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{argmin} F_\varepsilon}}{u^\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\approx} u(x) + u_1\left(\frac{\operatorname{dist}(x, S)}{\varepsilon}\right)$, gdzie

$u : \Omega \to \{\alpha, \beta\}$, $S = \partial\{u = \alpha\}$

Także $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$, gdzie

$F(u) = \operatorname{per}\{\{u = \alpha\}, \Omega\}$, $u : \Omega \to \{\alpha, \beta\}$, $\int_\Omega u = C$

Ad III:

$E^\varepsilon(u^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega W(\nabla u^\varepsilon)$

$\Omega_\varepsilon = \underset{\substack{\cap\! \shortmid \\ \mathbb{R}^2}}{\Omega} \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$

$u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}^3$, $u_\varepsilon \in W^{1,2}$

$W : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ funkcja gęstości energii elastycznej

Problem: $\underset{\cancel{\min}}{\inf} \left\{ E^\varepsilon(u^\varepsilon) : u^\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^3), \ u^\varepsilon|_{\partial\Omega \times (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})} \right\} = \varphi$

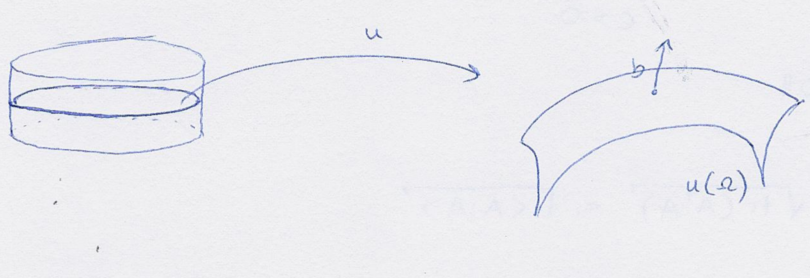
Reparametryzacja: $u \in W^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$, $\Omega_1 = \Omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$u(x_1, x_2, x_3) = u_\varepsilon(x_1, x_2, \varepsilon x_3)$

$F_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_1} W\left(\left[\partial_1 u, \partial_2 u, \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 u\right]\right) = E_\varepsilon(u^\varepsilon)$

chcemy $\min\left\{ F_\varepsilon(u) ; u|_{\partial\Omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \varphi(x_1, x_2) \right\}$

okazuje się, że $\operatorname{argmin} F_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\approx} \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^3}}{u(x_1, x_2)} + \varepsilon x_3 \underbrace{b(x_1, x_2)}_{\in \mathbb{R}^3}$ [cosserat vector],



gdzie $u = \operatorname{argmin} F$, $F \xleftarrow{\Gamma} F_\varepsilon$

$F(u) = \int_\Omega \tilde{W}(\nabla u)\, d(x_1, x_2)$.

Derivation of flexual model from 3d linear elasticity:

$S \subset \mathbb{R}^2$ otwarty, gładki, jednospójny

$S^h = S \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}) = \{ (x', x_3) : x' \in S, |x_3| < \frac{h}{2} \} \subset \mathbb{R}^3$

$E^h(v^h) = \frac{1}{h} \int_{S^h} \underbrace{|\mathrm{sym}\, \nabla v^h|^2}_{} \quad \forall\ v^h \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)$

$Q_3(\mathrm{sym}\, \nabla v^h)$ ← forma kwadratowa

$F^h(v^h) = E^h(v^h) - \frac{1}{h}\int_{S^h} f^h v^h$

$v^h = u^h - id$

displacement — deformation

odkształcenie

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — reference configuration

$u : \Omega \to \mathbb{R}^3$

ciało elastyczne, o stałej temp., jednorodne

$E(u) = \int_\Omega W(\nabla u)$ — energia elastyczna

$F(u) = E(u) - \int_\Omega \langle f, (u - id) \rangle$

en. całk.

$W : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

gęstość energii elastycznej

(i) objectivity (frame invariance)

$\forall_{F \in \mathbb{R}^{3\times3}} \ \forall_{Q \in SO(3)} \quad W(F) = W(QF)$

(ii) Normalization

$W(Id) = W(Q) = 0 \quad \forall\, Q \in SO(3)$

(iii) $\forall_{F,\ \det F \le 0} \quad W(F) = +\infty$ (nie można zgniatać w punkt i zmieniać orientacji)

(iii)' $\det F \to 0, \quad W(F) \to +\infty$

(iv) $W(F) \geq C \cdot \mathrm{dist}^2(F, SO(3)) \qquad C > 0$

$\mathrm{dist}(F, SO(3)) = \min_{Q \in SO(3)} \|F - Q\|$

$\langle A : B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B), \quad \|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \sqrt{\langle A : A \rangle}$

Tw: $\mathrm{dist}^2(F, SO(3))$ nie jest quasi-convex, rank-1-convex

$E(u) \simeq \int_\Omega \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$

Fakt: $T_{Id}\, SO(n) = so(n) = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = -A \}$

$u \approx id + v$

$\nabla u \approx Id + \nabla v$

$\operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3)) \approx \operatorname{dist}^2(\nabla u, Id + so(3)) = \operatorname{dist}^2(\nabla v, so(3)) = \|\operatorname{sym} \nabla v\|^2$

$so(n) \perp sym(n)$

$\rightarrow$ dlatego to jest liniowa teoria elastyczności

$\operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3)) \sim [(\nabla u)^T \nabla u - Id]^2$

$\nabla u = R\sqrt{\nabla u^T \nabla u}$

$$\operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3)) = \operatorname{dist}^2(\sqrt{(\nabla u)^T \nabla u} - Id) \approx \operatorname{dist}^2(\tfrac{1}{2}(\nabla u)^T \nabla u - Id, SO(3))$$

$$\sqrt{(\nabla u)^T \nabla u} = \sqrt{Id + (\nabla u^T \nabla u - Id)} = Id + \tfrac{1}{2}(\nabla u^T \nabla u - Id)$$

$$\approx \operatorname{dist}^2(\operatorname{sym}\nabla v, SO(3)) = \|\operatorname{sym}\nabla v\|^2$$

$u = id + v$

$$(\nabla u)^T \nabla u - Id = (Id + \nabla v)^T (Id + \nabla v) - Id = (\nabla v)^T + \nabla v + (\nabla v)^T \nabla v =$$

$$= 2 \operatorname{sym} \nabla v + \underbrace{(\nabla v)^T \nabla v}_{\text{małe}}$$

Lemat: Niech $f^h = h^3 f$, gdzie $f \in L^2(S, \mathbb{R}^3)$,

wtedy $\inf\{J^h(v^h),\ v^h \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)\} \leq 0$ $\quad (J^h = F^h)$

$\geq C$

Ponadto jeśli $|J^h(v^h) - \inf J^h| \to 0$, to wtedy

$E^h(v^h) \leq C$.