18. XII. 2012

Przypomnienie: $S^h = S \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$, $v^h \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)$,

$S \subset \mathbb{R}^2$

$$J^h(v^h) = E^h(v^h) - \frac{1}{h}\int_{S^h} f^h \cdot v^h \qquad , \qquad f^h \in L^2(S^h, \mathbb{R}^3)$$

$$E^h(v^h) = \frac{1}{h}\int_{S^h} |\mathrm{sym}\nabla v^h|^2$$

Fakt: Załóżmy, że $f^h(\underbrace{x_1, x_2}_{x' \in S}, x_3) = h^3 f(x_1, x_2)$, $f: S \to \mathbb{R}^3$, $f = (\underbrace{f_1, f_2}_{f'}, f_3)$

Ponadto załóżmy, że

(i) $\int_S f \, dx' = 0$

(ii) $\langle f', A'x' \rangle dx' = 0 \quad \forall A' \in so(2)$

(iii) $\int_S f_3 x' dx' = 0$

wówczas

$$-Ch^4 \leq \inf\{J^h(v^h), v^h \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)\} \leq 0$$

Dowód: 1. zauważmy najpierw, że (i), (ii), (iii) są równoważne:

$$\int_{S^h} \langle f^h, Ax + b \rangle dx = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}^3, A \in so(3), \forall_h \qquad (iv)$$

(iv) jest równoważny

- $\forall b \in \mathbb{R}^3 \quad 0 = \int_{S^h} \langle f^h, b \rangle \iff 0 = \int_S \langle f, b \rangle \iff$ (i)

- $\forall A \in so(3) \quad 0 = \int_{S^h} \langle f^h; Ax \rangle = \int_{S^h} \langle (f', f_3); (A'x' + cx_3, -cx') \rangle =$

$A = \left[\begin{array}{c|c} A' \in so(2) & c \\ \hline -c & 0 \end{array}\right]$

$c \in \mathbb{R}^2$

$$= \int_{S^h} \langle f', A'x' \rangle dx - h\int_S \langle c, f_3 x' \rangle$$

$$= h\int_S \langle f', A'x' \rangle dx' - h\int_S \langle c, f_3 x' \rangle$$

$$\iff \forall A' \in so(2) \int_S \langle f', A'x' \rangle dx' = 0 \iff (ii)$$

$$i \quad \forall c \in \mathbb{R}^2 \quad \int_S \langle f_3 x', c \rangle dx' = 0 \iff (iii)$$

Nierówność Korna:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, ograniczony, jednospójny, brzeg Lipschitzowski, $p > 1$

$$\forall v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \ \exists A \in so(n) \ \int_\Omega |\nabla v - A|^p \leq C_{\Omega,p} \int_\Omega |\mathrm{sym} \nabla v|^p .$$

Uwaga: 1. $\underline{p=1}$ nierówność jest fałszywa (Ornstein).

2. $\underline{p=2}$

$$\inf_{A \in so(n)} \int_\Omega |\nabla v - A|^2 \leq C_\Omega \int_\Omega |\mathrm{sym} \nabla v|^2$$

Zad. domowe: powyższe infimum realizuje się jako minimum, w jednej macierzy $A = \mathrm{skew}\left(\int_\Omega \nabla u \, dx \right)$

3. Nierówność Korna - Poincare

$$\forall v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \ \exists A \in so(n), b \in \mathbb{R}^n$$

$$\|v - (Ax+b)\|_{W^{1,2}} \leq C_\Omega \|\mathrm{sym} \nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Powrót do dowodu:

2. Zdefiniujmy $\tilde{v}^h \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^3)$:
$$\underbrace{\tilde{v}^h(x_1, x_2, x_3)}_{\substack{x \in S^1 \\ |x_3| \leq \frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{h^2}(v^h)'(x_1, x_2, hx_3), \ \frac{1}{h} v_3^h (x_1, x_2, hx_3) \right)^T$$

Energia: $J^h(v^h) = \tilde{J}^h(\tilde{v}^h) = (*)$

$$\nabla_h \tilde{v}^h = \frac{1}{h^2} \nabla v^h = \begin{bmatrix} \nabla_{tan} (\tilde{v}_h)' & \frac{1}{h} \partial_3 (\tilde{v}^h)' \\ \frac{1}{h} \nabla_{tan} \tilde{v}_3^h & \frac{1}{h^2} \partial_3 \tilde{v}_3^h \end{bmatrix}$$

$$(*) = \int_{S^1} h^4 |\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h|^2 - \left(\int_{S^1} h^5 \langle f', (\tilde{v}^h)' \rangle + \int_{S^1} h^4 \langle f_3, \tilde{v}_3^h \rangle \right)$$

$$\frac{1}{h^4} \tilde{J}^h(\tilde{v}^h) = \int_{S^1} |\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h|^2 - \int_{S^1} \langle (hf', f_3), \tilde{v}^h \rangle =$$

$$\geq \int_{S^1} |\mathrm{sym} \nabla \tilde{v}^h|^2 - \int_{S^1} \langle (hf', f_3), \tilde{v}^h \rangle \overset{KP}{\geq} \left[\exists A^h \in so(3), b^h \in \mathbb{R}^3 \right]$$

$$\geq C \|\tilde{v}^h - (A^h x - b^h)\|^2_{W^{1,2}} - \int_{S^1} \langle (hf', f_3), \tilde{v}^h - (A^h x - b^h) \rangle$$

$$\geq C\|\tilde{v}^h-(A^hx+b^h)\|^2_{L_2} - \|\tilde{v}^h-(A^hx+b^h)\|_{L_2}\|(hf', f_3)\|_{L_2}$$

$$= Cx^2 - C_1 x \geq -C$$

■

<u>Wniosek:</u> 1. każdy J^h posiada minimajzer

(jeśli $\tilde{v}^h$ - minimizing sequence dla $\frac{1}{h^4}\tilde{J}^h$, to: $|\frac{1}{h^4}\tilde{J}^h(\tilde{v}^h)| \leq C'$,

czyli $\underbrace{\|\tilde{v}^h-(A^hx+b^h)\|}_{=v^h}{}_{W^{1,2}} \leq C$, czyli $\tilde{v}^h \xrightarrow[W^{1,2}]{} v$, $v \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^3)$

$\frac{1}{h^4}\tilde{J}^h(v) \leq \liminf \frac{1}{h^4}\tilde{J}^h(\tilde{v}^h)$, czyli v^h jest minimajzerem)

2. Dla każdego ciągu $\{v^h\}$ t.że $J^h(v^h) \leq Ch^4$ mamy $E^h(v^h) \leq Ch^4$.

$$\left(\frac{1}{h^4}E^h(v^h) = \int_{S^1} |\mathrm{sym}\,\nabla_h \tilde{v}^h|^2 \leq C \right)$$

<u>Twierdzenie 1:</u> Załóżmy, że mamy ciąg $\{v^h\}$ t.że $\frac{1}{h^4}E^h(v^h) \leq C$. wtedy $\exists\, A^h \in so(3)$, $b^h \in \mathbb{R}^3$ t.że $v^h = \tilde{v}^h - (A^hx + b^h)$:

(i) $\tilde{v}^h \longrightarrow v$ w $W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^3)$ [podciąg]

(ii) $\partial_3 v_3 = 0$ Ponadto $v_3 \in W^{2,2}(S, \mathbb{R})$

(iii) $v_{tan}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \nabla_{tan} v_3(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$, $g \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^2)$

<u>Twierdzenie 2:</u> Przy założeniach z poprzedniego tw:

(iv) $\liminf \int_{S^1} |\mathrm{sym}\,\nabla_h \tilde{v}^h|^2 \geq \frac{1}{12}\int_S |\nabla^2_{tan} v_3|^2$

(v) $\liminf\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^4} J^h(v^h) \geq \frac{1}{12}\int_S |\nabla^2_{tan} v_3|^2 - \int_S f_3 v_3 \, dx'$

<u>Twierdzenie 3:</u> Niech $v_3 \in W^{1,2}(S, \mathbb{R})$. Istnieje ciąg $v^h \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)$ t.że:

$J^h(v^h) \leq Ch^4$ oraz $\tilde{v}^h \xrightarrow{W^{1,2}} (-x_3 \nabla v_3, v_3)$ oraz

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^4} J^h(v^h) = J(v_3)$

Dowód tw 1: Ponieważ $\| \mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h \|_{L_2(S^1)}$ jest ograniczony, również

$\| \mathrm{sym} \nabla \tilde{v}^h \|_{L^2(S^1)} \leq C$, a więc używając nierówności Korna - Poincarego

$\| \tilde{v}^h \|_{W^{1,2}} \leq C \Rightarrow \tilde{v}^h \xrightarrow{W^{1,2}} v$, więc otrzymujemy (i)

Ale: $(\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h)_{33} = \frac{1}{h^2} \partial_3 \tilde{v}^h_3 \Rightarrow \partial_3 \tilde{v}^h_3 \rightarrow 0 = \partial_3 v$

Ponadto: $(\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}_h)_{13,23} = \frac{1}{2h} (\partial_i \tilde{v}^h_3 + \partial_3 \tilde{v}^h_i)_{i=1,2} \xrightarrow{L_2(S^1)} 0$

czyli $\partial_i v_3 + \partial_3 v_i = 0 \quad \forall i=1,2$, czyli

$$\forall i=1,2 \quad v_i(\underbrace{x_1, x_2}_{x'}, x_3) = v_i(x', 0) + \int_0^{x_3} \partial_3 v_i \, dx = \underbrace{v_i(x', 0)}_{g_i(x_1, x_2)} - x_3 \partial_i v_3 (x')$$

∎

Dowód twierdzenia 2:

$$\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h \xrightarrow{L^2(S^1, \mathbb{R}^{3\times 3})} G \qquad G_{2\times 2} = \mathrm{w}\lim_{h\to 0} (\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h)_{2\times 2} = \mathrm{w}\lim_{h\to 0} [\nabla_{tan} (\tilde{v}^h)']$$

$$= -x_3 \nabla^2_{tan} v_3 + \mathrm{sym} \nabla g$$

$$(\tilde{v}^h)' \xrightarrow{W^{1,2}} v' = -x_3 \nabla_{tan} v_3 + g(x_1, x_2)$$

$$\liminf \int_{S^1} |\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}^h|^2 \geq \int_{S^1} |G|^2 \geq \int_{S^1} |G_{2\times 2}|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |x_3|^2 \int_S |\nabla^2_{tan} v_3|^2 + \int_S |\mathrm{sym} \nabla g|^2$$

$$- \underbrace{2 \int_{-1/2}^{1/2} x_3 \, dx_3}_{=0} \int_S \langle \nabla^2 v_3, \mathrm{sym} \nabla g \rangle$$

$$\geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{to się wylicza}}}{\frac{1}{12}} \int_S |\nabla^2 v_3|^2 \Rightarrow \text{(iv) udowodnione}$$

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{h^4} J^h(v^h) = \liminf_{h\to 0} \left(\int_{S^1} |\mathrm{sym} \nabla_h \tilde{v}_h|^2 - \int_{S^1} \langle \underset{\substack{\downarrow L_2 \\ (0, f_3)}}{(h f_i', f_3)}, \underset{\substack{\downarrow L_2 \\ v}}{\tilde{v}^h} \rangle \right)$$

$$\geq \frac{1}{12} \int_S |\nabla^2 v_3|^2 - \int_S f_3 v_3 = J(v_3)$$

∎

Dowód twierdzenia 3: weźmy $v_3 \in W^{2,2}(S, \mathbb{R})$. Definiujemy

$$\tilde{V}^h(\underbrace{x_1, x_2}_{x'}, x_3) = (-x_3 \partial_1 v_3, -x_3 \partial_2 v_3, v_3) \in W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^3)$$

wtedy
$$\nabla_h \tilde{v}^h (x', x_3) = \begin{bmatrix} -x_3 \nabla^2 v_3 & -\frac{1}{h} \nabla v_3 \\ \frac{1}{h} \nabla v_3 & \frac{1}{h^2} \partial_3 v_3 \end{bmatrix},$$

więc
$$\operatorname{sym} \nabla_h \tilde{v}(x', x_3) = \begin{bmatrix} -x_3 \nabla^2 v_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} \partial_3 v_3 \end{bmatrix}$$
więc

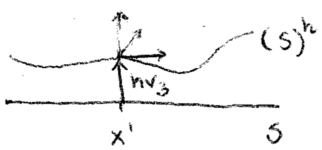
$$\lim \frac{1}{h^4} J^h(v^h) = \lim \frac{1}{h^4} \tilde{J}^h(\tilde{v}^h) = \lim \left(\int_{S^1} |\operatorname{sym} \nabla_h \tilde{v}^h|^2 - \int_{S^1} \langle (h f', f_3), \tilde{v}^h \rangle \right) =$$
$$= J(v_3)$$

■

Uwaga 1. Recovery sequence na S^h: $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{h}) \in S^1$

$$v^h(x', x_3) = h v_3 e_3 + h^2 \left(\frac{x_3}{h} \nabla_{tan} v_3\right) = \begin{pmatrix} 0_{tan} \\ h v_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -h \nabla_{tan} v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretacja: Rozważmy deformację $S \ni x' \longmapsto x' + h v_3(x') e_3$



wektor normalny powierzchni $(S)^h$:

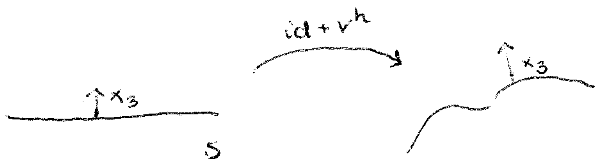
$$\vec{N}(x') := (e_1 + h(\partial_1 v_3) e_3) \times (e_2 + h(\partial_2 v_3) e_3) =$$
$$= e_3 + h(\partial_2 v_3(-e_2) + \partial_1 v_3(-e_1))$$
$$= e_3 - h \nabla_{tan} v_3$$

Unit normal: $\vec{n}(x') = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = e_3 - h \nabla_{tan} v_3 + O(h^2)$

$|\vec{N}| = 1 + O(h)$

$|\vec{N}|^{-1} = 1 - O(h)$

$$(id + v^h)(x', x_3) = \begin{pmatrix} x' \\ h v_3(x') \end{pmatrix} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -h \nabla v_3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\approx \vec{n}(x')}$$



Udowodniliśmy Kirchhoff - Love ansatz

Konkluzja: otrzymaliśmy następujący rezultat Γ- zbieżności:

$$\frac{1}{h^4}\tilde{J}^h \xrightarrow{\Gamma} J(v) = \begin{cases} \frac{1}{12}\int_S |\nabla^2_{tan} v_3|^2 - \int_S f_3 v_3 & \text{jeśli } v = (-x_3\nabla_{tan} v_3, v_3) \text{ oraz } v_3 \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3) \\ +\infty & \text{w p.p.} \end{cases}$$

(weak convergence $W^{1,2}(S, \mathbb{R}^3)$)

⇧

stąd + Tw 1 => minima zbiegają do minimów

argmin $J^h \to$ argmin J

[to jest super]

NIERÓWNOŚĆ KORNA: $\Omega \in \mathbb{R}^n$ otwarty, ograniczony, jednospójny, lipschitzowski brzeg

Lemat: $v \in W^{1,2}(\Omega)$. Załóżmy, że $\forall$ $\nabla v \in so(n)$ dla p.w. $x \in \Omega$.

wtedy: $\nabla v \equiv A \in so(n)$

dowód: ⇧ $\Delta v = 2\operatorname{div}(\operatorname{sym}\nabla v - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{sym}\nabla v)\cdot Id)$ $\quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

a więc jeśli $\nabla v \in so(n)$ dla p.w. x

=> $\Delta v = 0$ => v jest gładka

ograniczmy się do $\underline{n=3}$ (⇧ dowodne 2)

$\nabla v = -(\nabla v)^T$, więc $\begin{bmatrix} \nabla v^1 \\ \nabla v^2 \\ \nabla v^3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \\ \partial_3 v \end{bmatrix}$

=> $0 = \nabla(\operatorname{rot} v)$ => $\operatorname{rot} v = c \in \mathbb{R}^3$

$$\underset{\nabla v}{\overset{\|}{\operatorname{skew}\nabla v}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

↳ elementy rot v, więc

$\nabla v = A \in so(3)$

Nierówność Korna: (RIGIDITY ESTIMATE)

$\exists A \in so(n)$ $\quad \int |\nabla v - A|^2 \leq C_\Omega \int_\Omega \underbrace{|\operatorname{sym}\nabla v|^2}_{= \operatorname{dist}^2(\nabla v, so(n))}$

Twierdzenie Liouville'a: Jeśli $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ oraz $\nabla u \in SO(n)$ dla p.w. $x \in \Omega$, to wtedy $\nabla u \equiv R \in SO(n)$

D-d: (Y. Reshetnyak)

$u \in W^{1,2}$ i $\nabla u \in SO(n) \Rightarrow u \in W^{1,\infty}$, $\cancel{\operatorname{div}\operatorname{cof}\nabla u = 0}$

(Jeżeli macierz jest odwracalna, to $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^T$

ogólnie $\operatorname{cof}[A] = \left[\ \cdots\ (-1)^{i+j}\det A_{ij}\ \cdots\ \right]$

$A \in SO(n) \Rightarrow \operatorname{cof} A = A$)

Fakt: $\forall\, u \in W^{1,n-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $\operatorname{div}\operatorname{cof}(\nabla u) = 0$

powrót do dowodu: $0 = \operatorname{div}\operatorname{cof}\underbrace{\nabla u}_{\in SO(n)} = \operatorname{div}\nabla u = \Delta u \Rightarrow u$ - gładkie

$$0 = \Delta|\nabla u|^2 = \Delta(\langle \nabla u : \nabla u \rangle) = 2\langle \underbrace{\Delta \nabla u}_{=0} : \nabla u \rangle + 2\langle \nabla^2 u : \nabla^2 u \rangle =$$

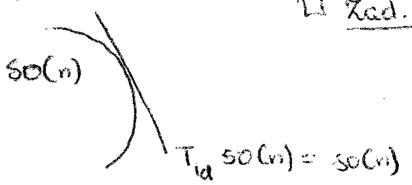
$$= 2|\nabla^2 u|^2$$

$\Rightarrow \nabla^2 u = 0 \Rightarrow \nabla u = Q \in SO(n)$ ■

Twierdzenie (Friesecke, James, Müller, Geometric rigidity estimate, nonlinear Korn inequality)

$$\forall\, u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)\quad \exists\, Q \in SO(n)\quad \int_\Omega |\nabla u - Q|^2 \le C_\Omega \int_\Omega \operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(n))$$

Uwaga:



Zad. dom „Wyprowadzić" nierówność Korna z powyższej nierówności

$u = id + \varepsilon v$

Korn II: $\forall\, v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $v \cdot \vec{n} = 0$ na $\partial\Omega$

$\exists\, A \in so(n)$ t.że zachodzi nier. Korna, ponadto $\exists\, b \in \mathbb{R}^n$ t.że

$(Ax + b)\cdot\vec{n} = 0$

Korn III: $\forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ $\exists\, A \in so(n)$ t.że mamy nier. Korna

$+\ \exists\, b \in \mathbb{R}^n$ t.że $(Ax + b)|_{\partial\Omega} = 0$

$\Rightarrow A = 0$ i nier. Korna ma postać $\int_\Omega |\nabla v|^2 \le 2 \cdot \int_\Omega |\operatorname{sym} \nabla v|^2$

Tw. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, ograniczony. Wówczas $\forall\, u \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 2 \int_\Omega |\mathrm{sym}\, \nabla u|^2$$

Dowód: $\Delta u = 2 \,\mathrm{div} \left(\mathrm{sym}\, \nabla u - \frac{1}{2} (\mathrm{div}\, u)\, \mathrm{Id} \right) \quad / \cdot u \in W_0^{1,2}$

$$-\int_\Omega |\nabla u|^2 = -2 \int_\Omega \langle \mathrm{sym}\, \nabla u : \underbrace{\nabla u}_{\substack{\mathrm{sym}\, \nabla u \\ + \,\mathrm{skew}\, \nabla u}} \rangle + \int_\Omega \langle (\mathrm{div}\, u)\, \mathrm{Id} : \nabla u \rangle$$

$$= -2 \int_\Omega |\mathrm{sym}\, \nabla u|^2 + \int_\Omega |\mathrm{div}\, u|^2$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 = 2 \int_\Omega |\mathrm{sym}\, \nabla u|^2 - \int_\Omega |\mathrm{div}\, u|^2 \leq 2 \int_\Omega |\mathrm{sym}\, \nabla u|^2$$

Pokazać, że 2 jest optymalną stałą ■