19.XII.2012

Lemat: (zadanie domowe)

$M: \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ operator liniowy. wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) $\exists_{\gamma>0} \ \forall_{u\in W^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \leq \gamma \int_{\mathbb{R}^n} \langle M\nabla u : \nabla u\rangle\, dx$

(ii) $\exists_{\gamma>0} \ \forall_{a,b\in\mathbb{R}^n} \quad \langle M(a\otimes b) : (a\otimes b)\rangle \geq \frac{1}{\gamma}|a|^2|b|^2 = |a\otimes b|^2$

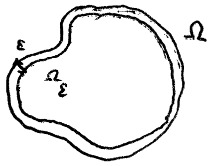
(operator M jest dodatnio określony na macierzach rzędu 1)

Lemat 1: (nierówność oleinik)

Niech $f\in W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$, $\Delta f = 0$. wtedy

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)\,dx \leq 4\int_\Omega |f|^2$$

D-d: weźmy $\varepsilon>0$, całkujemy $\Delta f = 0$ po pomnożeniu przez funkcję: $x\mapsto(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)-\varepsilon)^2 f$ na obszarze $\Omega_\varepsilon = \{x\in\Omega;\ \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\geq\varepsilon\}$



$$\int_{\Omega_\varepsilon}(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)-\varepsilon)^2|\nabla f|^2 = -\int_{\Omega_\varepsilon} 2f\cdot(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega-\varepsilon)-\varepsilon)\langle\nabla f, \nabla(\operatorname{dist})\rangle$$

$$\leq 2\int_{\Omega_\varepsilon}|f|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon}|\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)-\varepsilon|^2\cdot|\nabla f|^2\cdot\underbrace{|\nabla(\operatorname{dist})|^2}_{\leq 1}$$

$\Uparrow$ $x\mapsto\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ ta funkcja ma stałą Lipschitza 1

$$\Rightarrow \int_{\Omega_\varepsilon}(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)-\varepsilon)^2|\nabla f|^2 \leq 4\cdot\int_{\Omega_\varepsilon}|f|^2 \leq 4\int_\Omega |f|^2$$

$\blacksquare$

Lemat 2: (nierówność Hardy'ego) [np. A. Kufner „Inequalities ...”]

$u: [0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $u(0)=0$, $u\in AC$

$\Rightarrow$ • $\int_0^T |u(t)|^2 \leq 4\cdot\int_0^T |u'(t)|^2 |t-T|^2\,dt$

• $\int_0^T \left|\frac{u(t)}{t}\right|^2 \leq 4\cdot\int_0^T |u'(t)|^2\,dt$

Twierdzenie: (Kondratiev, Oleinik)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty, ograniczony, gwiaździsty względem kuli $B(0,r)$, $\Omega \subset B(0,r)$.

Wtedy $\forall\ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C\left(\int_\Omega |\mathrm{sym}\nabla u|^2 + \int_{B_r} |\nabla u|^2\right)$$

i $C = C(n, \frac{r}{R})$

Wniosek 1: z tymi samymi założeniami, co powyżej mamy

$\forall u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{n,\frac{R}{r}} \int_\Omega |\mathrm{sym}\nabla u|^2 + C_{n,\frac{R}{r}, \mathrm{dist}(B_r, \partial\Omega)} \int_\Omega |u|^2 \qquad (*)$$

D-d: weźmy $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$ t. że $\varphi|_{B_r} \equiv 1$. wtedy

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi u)|^2 \leq 2 \cdot \int_\Omega |\mathrm{sym}\nabla(\varphi u)|^2, \quad \text{czyli}$$

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \leq C \int_\Omega |\mathrm{sym}\nabla u|^2 + C \cdot \int_\Omega |u|^2$$

Używając powyższego tw. otrzymujemy tezę ∎

Wniosek 2: (i) Te same rezultaty są prawdziwe dla każdej dziedziny Ω, która jest sumą skończonej ilości dziedzin spełniających założenia tw. OK

(ii) Ponieważ każdy zbiór otwarty, ograniczony o lipschitzowskim brzegu może być przedstawiony jak powyżej, to nierówność $(*)$ jest prawdziwa też dla takich zbiorów.

Wniosek 3: (klasyczna nierówność Korna)

$$\forall u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \quad \int_\Omega |\nabla u - \mathrm{skew} \fint_\Omega \nabla u|^2 \leq C_\Omega \int_\Omega |\mathrm{sym}\nabla u|^2 \qquad (K)$$

D-d: Zauważmy, że (K) wystarczy udowodnić dla pri u o własnościach

- $\mathrm{skew} \fint \nabla u = 0$
- $\fint u = 0$
- $\int_\Omega |\nabla u|^2 = 1$

(bo wymienimy u na $\tilde{u}(x) = u(x) - (\mathrm{skew} \fint \nabla u)x - \fint (u(y) - (\mathrm{skew} \fint \nabla u)y)\,dy$, gdzie $\tilde{u}$ ma wł. pożądane)

Przez sprzeczność: załóżmy, że mamy ciąg (u_k) spełniający powyższe własności t. że $\|\mathrm{sym}\nabla u_k\|_{L_2} \to 0$

$\|u_k\|_{W^{1,2}} \le C$, więc $u_k \xrightarrow[W^{1,2}]{} u$. Widać, że $\operatorname{sym}\nabla u = 0$

$\Rightarrow u = Ax + b$, $A \in so(n)$

$0 = \fint u_k \longrightarrow \overset{b}{\widetilde{\fint u}} = 0$

$0 = \operatorname{skew} \fint \nabla u_k = \underbrace{\operatorname{skew} \fint \nabla u}_{A}$,

czyli $u = 0$

Używając $(*)$ dostajemy $1 = \int |\nabla u_k|^2 \le C_\Omega \Big(\underbrace{\int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla u_k|^2 + \int_\Omega |u_k|^2}_{\to 0} \Big)$,

sprzeczność. ∎

Dowód tw. ok: Zauważmy, że wystarczy wziąć $R = 1$ i $r < 1$ i pokazać nierówność ze stałą $C = C(n, r)$ (zad. domowe)

Krok 1: $u = v + w$, gdzie $\left.\begin{matrix} \Delta v = \Delta u & \text{w } \Omega \\ v = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \Delta w = 0 & \text{w } \Omega \\ w = u & \text{na } \partial\Omega \end{matrix}\right.$

łatwiejsza część — trudniejsza

$\Delta u = 2 \operatorname{div}\left(\operatorname{sym}\nabla u - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\operatorname{sym}\nabla u)\, Id \right)$

$\int (\Delta v) v = \int (\Delta u) v$

$\int_\Omega |\nabla v|^2 = 2 \int_\Omega \langle \nabla v : -\,〃\,- \rangle \le 2 \|\nabla v\|_{L_2} \cdot \|\operatorname{sym}\nabla u - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{sym}\nabla u)\cdot Id\|_{L_2}$

$\Rightarrow \|\nabla v\|_{L_2} \le C_n \|\operatorname{sym}\nabla u\|_{L_2}$

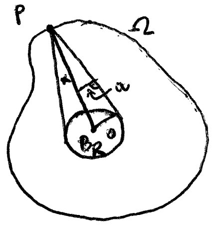
Krok 2: Mamy $\Delta(\operatorname{sym}\nabla w) = 0$. Stosujemy nierówność Oleinik:

$\int_\Omega |\nabla(\operatorname{sym}\nabla w)|^2 \operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega) \le C_n \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla w|^2$

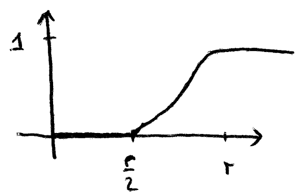
[zad. dom: $[\nabla^2 w^k]_{ls} = \partial_l [\operatorname{sym}\nabla w]_{ks} + \partial_s [\operatorname{sym}\nabla w]_{kl} - \partial_k [\operatorname{sym}\nabla w]_{ls}$
$w: \Omega \to \mathbb{R}^n$]

Stąd $\int_\Omega |\nabla^2 w|^2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le C_n \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla w|^2$

Krok 3: Weźmy $\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Stosujemy nierówność Hardy'ego na promieniu $[0, P]$ $(P \in \partial\Omega)$



Θ:



, $|\Theta'| \le \frac{4}{r}$

$$\int_0^{|p|} |\theta\psi|^2 d|x| \leq 4\cdot \int_0^{|p|} \left|\frac{\partial(\theta\psi)}{\partial|x|}\right|^2 \cdot \big||p|-|x|\big|^2 \leq \left(\frac{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}{r}\right)^2 \leq$$

$$\left(\frac{||x|-|p||}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)} \leq \frac{||x|-|p||}{a} = \frac{|p|}{r} \leq \frac{1}{r}\right)$$

$$\leq C_r \cdot \int_0^{|p|} \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)\left(|\theta'|^2|\psi|^2 + |\theta|^2|\nabla\psi|^2\right)$$

Stąd $\displaystyle\int_r^{|p|} |\psi|^2 \leq C_r\left(\int_{r/2}^{r} |\psi|^2 \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega) + \int_{r/2}^{|p|} |\nabla\psi|^2 \operatorname{dist}^2\right)$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_r^{|p|} |\psi|^2 |x|^{n-1} \leq C_r\left(\int_{r/2}^{r} |\psi|^2 |x|^{n-1} \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega) + \int_{r/2}^{|p|} |x|^{n-1}|\nabla\psi|^2 \operatorname{dist}^2\right)$

(bo $c \leq |x|^{n-1} \leq C$)

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\Omega\setminus B_r} |\psi|^2 \leq C_r\left(\int_{B_r} |\psi|^2 \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega) + \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)\right).$

Stosujemy to do $\psi =$ współczynniki ∇w.

Czyli dostajemy

$$\int_{\Omega\setminus B_r} |\nabla w|^2 \leq C_{r,n}\Big(\int_{B_r} |\nabla w|^2 \underbrace{\operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)}_{\leq 1} + \int_\Omega |\nabla^2 w|^2 \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)\Big)$$

$$\overset{K2}{\leq} C_{r,n}\Big(\int_{B_r} |\nabla w|^2 + \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla w|^2\Big)$$

<u>Krok 4:</u> $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_{r,n}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_{B_r} |\nabla w|^2 + \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla w|^2\Big)$

[$w=u-v$] $\displaystyle\leq C_{r,n}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_{B_r} |\nabla w|^2 + \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla u|^2 + \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla v|^2\Big)$

$$\leq C_{r,n}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_{B_r} |\nabla w|^2 + \int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla u|^2\Big)$$

$$\leq C_{r,n}\Big(\int_\Omega |\operatorname{sym}\nabla u|^2 + \int_{B_r} |\nabla u|^2\Big)$$

■

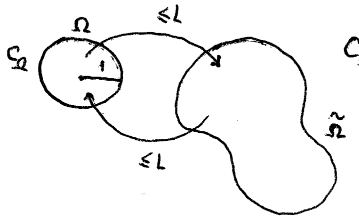
Twierdzenie (FJM): $\exists\, C_\Omega \ \forall u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \ \exists\, Q \in SO(n)$

$$\int_\Omega |\nabla u - Q|^2 \leq C_\Omega \int_\Omega |\operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(n))|^2 ,$$

stała C_Ω jest niezmiennicza względem jednokładności.

oraz uniform for the uniform bilipschitz images of a unit ball,

t.zn



$C_{\tilde{\Omega}}$ zależy od stałej L i C_Ω.

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ 2d powierzchnia, $S^h = \{x = x + t\vec{n} : x \in S, |t| < \frac{h}{2}\}$

$\vec{n}(x)$ wektor normalny do S

$T_x S$ pł. styczna

$\Pi(x) = \nabla_{tan} \vec{n}(x)$ shape operator

$\Pi(x)\tau \in T_x S$, $\Pi(x) : T_x S \times T_x S \to \mathbb{R}$, $\forall \tau, \eta \in T_x S \ \Pi(x)(\tau, \eta) = \langle \eta, \partial_\tau \vec{n} \rangle$

$\pi : S^h \to S$, $\pi(x) = x$

$$E^h(u^h) = \frac{1}{h} \int_{S^h} W(\nabla u^h) ; \quad u^h \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)$$

$W(RF) = W(F)$

$W(Id) = 0$

$W(F) \geq c \operatorname{dist}^2(F, SO(3))$

$$J^h(u^h) = E^h(u^h) - \frac{1}{h} \int_{S^h} f^h(u^h - id)\, dx ; \quad f^h : S^h \to \mathbb{R}^3$$

$$f^h(x + t\vec{n}) = h^\alpha \det(Id + t\Pi(x))^{-1} f(x) , \quad \alpha \geq 0$$

Twierdzenie:

① $\inf J^h \in [-Ch^\beta, 0]$, gdzie $\beta = 2\alpha - 2$

② Jeśli $\frac{1}{h^\beta} J^h(u^h) \leq C$, to wtedy $E^h(u^h) \leq Ch^\beta$

Jeśli założymy, co następuje na $f(x) = g(x) + x$:

- $\int_S g(x) = 0$
- $\int_S \langle g(x), Ax \rangle = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{3\times3}$
- $\int_S x = 0$

Fakt: Te warunki implikują

$$\forall Q \in SO(3): \int_S \langle f(x), Qx\rangle = \int_S \langle x, Qx\rangle \leq \int_S |x|^2 = \int_S \langle f(x), x\rangle \qquad (**)$$

Twierdzenie: Niech $u \in W^{1,2}(S^h, \mathbb{R}^3)$. Załóżmy, że $\frac{1}{h^2} E^h(u) << 1$. wtedy $\exists R \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^{3\times3})$ t.że $R(x) \in SO(3)$ dla p.w. $x \in S$, $\exists Q \in SO(3)$ spełniające:

(i) $\int_{S^h} |\nabla u - R\pi|^2 \leq C \int_{S^h} \operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3))$

(ii) $\int_{S} |\nabla R|^2 \leq \frac{C}{h^3} \int_{S^h} \operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3))$

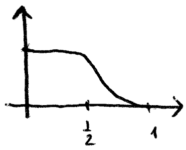
(iii) $\|Q^T R - Id\|^2_{L_p(S)} \leq \frac{C}{h^3} \int_{S^h} \operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3))$, $\forall p>1$

Dowód: 1. Dla każdego $x \in S$ definiujemy „dysk" $D_{x,h}$ i „cylinder" $B_{x,h}$:

$D_{x,h} = S \cap B(x,h)$, $B_{x,h} = \pi^{-1}(D_{x,h})$ mamy $\int_{B_{x,h}} |\nabla u - \underset{\in SO(3)}{R_{x,h}}|^2 \overset{(FJM)}{\leq} C \int_{B_{x,h}} \operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3))$,

gdzie C jest stałą niezależną od h i od x.

2. Niech $\Theta \in C_0^\infty([0,1], \mathbb{R})$. Dla każdego $x \in S$ definiujemy



$$\eta_x(z) = \frac{\Theta(|\pi z - x|/h)}{\int_{S^h} \Theta(|\pi y - x|/h)\,dy}$$

Zauważmy, że: (a) $\int_{S^h} \eta_x \, dz = 1$

(b) $\eta_x(z) = 0 \quad \forall z \notin B_{x,h}$

(c) $\|\eta_x\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{h^3}$

(d) $\|\nabla_x \eta_x\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{h^4}$

Definiujemy $\tilde{R}(x) = \int_{S^h} \eta_x(z) \nabla u(z)\,dz \in W^{1,2}(S, \mathbb{R}^{3\times3})$. Mamy nast. oszacowania

(α) $|\tilde{R}(x) - R_{x,h}|^2 = |\int_{S^h} \eta_x(z)(\nabla u(z) - R_{x,h})|^2 \leq \|\eta_x\|_{L^\infty} \cdot \int_{B^{x,h}} |\nabla u(z) - R_{x,h}|^2 \overset{FJM}{\leq}$

$$\leq \frac{C}{h^3} \int_{B_{x,h}} \operatorname{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

$$(\beta)\quad |\nabla\tilde{R}(x)|^2 = |\int_{S^h} \nabla_x \eta_x(z)\nabla u(z)\,dz|^2 = |\int_{S^h} (\nabla_x\eta_x)(\nabla u - R_{x,h})\,dz|^2 \leq$$

$$\leq \int_{B_{x,h}} |\nabla_x \eta_x|^2 \int_{B_{x,h}} |\nabla u - R_{x,h}|^2 \underset{FJM}{\leq} \frac{C}{h^5}\int_{B_{x,h}} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))\,dz.$$

$$(\gamma)\quad \forall x' \in D_{x,h}\quad |\nabla\tilde{R}(x')|^2 \leq \frac{C}{h^5}\int_{2B_{x,h}} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

$$\forall x'' \in D_{x,h}\quad |\tilde{R}(x'') - \tilde{R}(x)|^2 \leq Ch^2 \|\nabla\tilde{R}\|^2_{L^\infty(D_{x,h})} \leq \frac{C}{h^3}\int_{2B_{x,h}} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

Stąd $$\int_{B_{x,h}} |\nabla u - \tilde{R}\pi|^2 \leq C\Big(\int_{B_{x,h}} |\nabla u - R_{x,h}|^2 + \int_{B_{x,h}} |R_{x,h} - \tilde{R}(x)|^2 dz + \int_{B_{x,h}} |\tilde{R}(x) - \tilde{R}\pi z|^2 dz$$

$$\overset{(FJM)+(\alpha)+(\gamma)}{\leq} C\int_{2B_{x,h}} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3)).$$

Twierdzimy, że S można pokryć rodziną dysków $\{D_{x_i,h}\}_{i=1}^N$ tak że liczba pokryciowa $\{2B_{x_i,h}\}_{i=1}^N$ jest niezależna od h.

$\downarrow$

(każdy punkt siedzi w co najwyżej tylu zbiorach)

Zatem $$\int_{S^h} |\nabla u - \tilde{R}\pi|^2 \leq C\int_{S^h} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

W ten sam sposób (β) implikuje $$\int_S |\nabla\tilde{R}|^2 \leq \frac{C}{h^3}\int_{S^h} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

Zauważmy, że $\mathrm{dist}^2(\tilde{R}(x), SO(3)) \underset{(\alpha)}{\leq} \frac{C}{h^3}\int \mathrm{dist}^2 << 1$

Możemy definiować $R(x) = \mathbb{P}_{SO(3)}\tilde{R}(x) \in SO(3)$, ~~$R\pi(x) = R(x)$~~

$$\int_{S^h} |\nabla u - R\pi|^2 \leq C\Big(\int_{S^h} |\nabla u - \tilde{R}\pi|^2 + \underbrace{\int_{S^h} |R\pi - \tilde{R}\pi|^2}\Big) \leq C\int_{S^h} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

$$\mathrm{dist}^2(\tilde{R}, SO(3)) \leq C\,(|\tilde{R}\pi - \nabla u|^2 + \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

Ponadto $$\int_S |\nabla R|^2 \leq C\int_S |\nabla\tilde{R}|^2 \leq \frac{C}{h^3}\int_{S^h} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$$

Mamy

$$\Big(\int_S |R - ⨍R|^p\Big)^{2/p} \underset{W^{1,2}(S)\hookrightarrow L^p(S)}{\leq} \|R - ⨍R\|^2_{W^{1,2}(S)} \leq C\|\nabla R\|^2_{L_2} \leq \frac{C}{h^3}\int_{S^h} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3)).$$

Weźmy $Q \in SO(3)$ t.że $|⨍R - Q| = \mathrm{dist}(⨍R, SO(3))$

Mamy $\forall\, p \geq 1$ $\quad c\|R-Q\|^2_{L_p(S)} \leq c\left(\|R-\fint R\|^2_{L_p(S)} + \underbrace{\|\fint R - Q\|^2}\right) \leq \frac{c}{h^3}\int_{S^h} \mathrm{dist}^2(\nabla u, SO(3))$

$\quad \|Q^T R - Id\|^2_{L_p(S)} \leq c\|R-Q\|^2_{L_p(S)}$

$$\leq C\int_S \mathrm{dist}^2(\fint R, SO(3))$$

$$\leq C \int_S |\fint R - R(x)|^2 dx$$

$\blacksquare$