15. X. 2012

Def: (ułamkowe przestrzenie sobolewa) [Sobolewa - Słobodeckiego]

$k>0$, $k \notin \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ - ograniczony

$W^{k,p}(\Omega)$ - podprzestrzeń składająca się z tych $u \in W^{[k],p}(\Omega)$, dla których $\underset{|\alpha|=[k]}{I_\alpha(u)} = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+p(k-[k])}} dxdy < \infty$

z normą $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W^{[k],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[k]} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}}$

$W^{k,p}(\Omega)$ - unormowana przestrzeń liniowa

$W^{k,p}(\Omega) \subset W^{[k],p}(\Omega)$

Tw: $k>0$, $k \notin \mathbb{N}$, $p \geq 1$

(i) $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha

(ii) $W^{k,p}$ jest ośrodkowa dla $p \geq 1$ i refleksywna dla $p>1$

$A: W^{k,p} \to L^p(\Omega)$

$x = (x_1, \dots, x_N)$

Def: $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0,1]$, $\mathbb{R}^N \supset \Omega \in C^{k,\lambda}$, gdy istnieją

(i) m kartezjańskich układów współrzędnych X_r $(r = 1, 2, \dots, m)$

$X_r(x_{r,1}, \dots, x_{r,N-1}, x_{r,N}) = (x_{r'}, x_{r,N})$, gdzie

$x_{r'} = (x_{r,1}, \dots, x_{r,N-1})$

(ii) liczba $\alpha>0$ i m funkcji

$a_r \in C^{k,\lambda}(\bar{\Delta}_r)$, $r = 1, \dots, m$, gdzie

$\Delta_r = \{ x_{r'} : x_{r_i} \in (-\alpha, \alpha) : i = 1, \dots, N-1 \}$

(iii) liczba $\beta > 0$ t. że

(I) zbiory $\Lambda_r = A_r^{-1}(\{X_r = (x_{r'}, x_{r,N}) : x_{r'} \in \Delta_r \text{ i } x_{r_N} = a_r(x_{r'})\})$

$(A_r : X_r \to X_r$ transformacja współrzędnych)

są podzbiorami $\partial\Omega$ dla $r = 1, \dots, m$ i $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^m \Lambda_r$

(II) $r = 1, \dots, m$ $U_r^+ = A_r^{-1}(\{X_r = (x_{r'}, x_{r,N})$: $x_{r'} \in \Delta_r$ i $a_r(x_{r'}) < x_{r_N} < a_r(x_{r'}) + \beta\})$

- otwarte podzbiory Ω

(III) $r = 1, \dots, m$

$$U_r = A_r^{-1}\left(\{X_r = (x_{r'}, x_{r_N}) : x_{r'} \in \Delta_r \ \ i \ \ a_r(x_{r'}) - \beta < x_{r_N} < a_r(x_{r'})\right)$$

jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$

$U_r = U_r^+ \cup \Lambda_r \cup U_r^-$ - otwarte

$\exists\, \mathcal{U}_0$ - otwarte $\quad \mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}}_0 \subset \Omega \qquad \{U_r\}_{r=0}^m$ - pokrycie ~~podzbiory~~ otwarte $\overline{\Omega}$

$\{U_r\}_{r=1}^m$ - otwarte pokrycie $\partial\Omega$.

Def: $r = 1, \dots, m$

$Q_r : \overline{\Delta}_r \times [-\beta, \beta] \to \mathbb{R}^N$

$Q_r(x_{r'}, \xi) = (x_{r'}, a_r(x_{r'}) + \xi)$

Teraz $A_r^{-1} \circ Q_r$ jest „1-1" z $\Delta_r \times (-\beta, \beta)$ na $\mathcal{U}_r$, $\Delta_r \times (0, \beta)$ na $\mathcal{U}_r^+$,

$\Delta_r \times [0, \beta)$ na $\Lambda_r \cup U_{r}^{+}$

${}_r u$ określamy na $Q_r^{-1} \circ A_r(M)$, $\quad M \subset U_r$

${}_r u = u \circ A_r^{-1} \circ Q_r$

Def: $G \subset \partial\Omega$ jest podzbiorem zerowym

$$\forall r \in \{1, \dots, m\} \qquad \mu_{N-1}\left(\{Q_r^{-1} \circ A_r(G \cap \Delta_r)\}\right) = 0$$

Def: u określona p.w. na $\partial\Omega$ należy do $L_p(\partial\Omega)$ $\quad (1 \le p < \infty)$

$$\forall r \in \{1, \dots, m\} \qquad {}_r u \in L_p(\Delta_r)$$

$\Omega \in C^{0,1}$ $\qquad \|u\|_{L_p(\partial\Omega)} = \left(\sum_{r=1}^m \int_{\Delta_r} |{}_r u(x_{r'}, 0)|^p \, dx_{r'}\right)^{1/p}$

<u>Nierówność Hardy'ego:</u>

$a, b \in \mathbb{R}$, $\quad u \in L_p(a, b)$, $\quad p > 1$

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x-a} \int_a^x |u(y)| \, dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p \, dx$$

Pokażemy najpierw, że dla $\Omega = Q = (-1, 1)^N$ istnieje stała $M > 0$

$\forall_{u \in C^\infty(\overline{Q})}$ mamy $\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p}, p}(Q)} \le M \|u\|_{W^{1,p}(Q)}$

Lemat: 6.8.9

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < x_1\}$$

Wtedy istnieje stała $C > 0$ t.że

$$\int_0^1 \int_0^t \left| \frac{u(t,t) - u(\tau,\tau)}{t-\tau} \right|^p d\tau\, dt \le C \|u\|^p_{W^{1,p}(D)}$$

D-d: $u \in C^\infty(\overline{D})$, $0 \le \tau < t \le 1$

$$\left| \frac{u(t,t) - u(\tau,\tau)}{t-\tau} \right|^p \le 2^{p-1} \left(\left| \frac{u(t,t) - u(t,\tau)}{t-\tau} \right|^p + \left| \frac{u(t,\tau) - u(\tau,\tau)}{t-\tau} \right|^p \right)$$

$$\le 2^{p-1} \left\{ \left(\frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t \left| \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial x_2} \right| dx_2 \right)^p + \left(\frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t \left| \frac{\partial (x_1, \tau)}{\partial x_1} \right| dx_1 \right)^p \right\}$$

Całkujemy po D i stosujemy Fubiniego

$$\int_0^1 \int_0^t \left| \frac{u(t,t) - u(\tau,\tau)}{t-\tau} \right|^p d\tau\, dt \le 2^{p-1} \left\{ \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{1}{t-\tau} \int_t^\tau \left| \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial x_2} \right| dx_2 \right. \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \int_\tau^1 \left(\frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t \left| \frac{\partial u(x_1, \tau)}{\partial x_1} \right| dx_1 \right)^p dt\, d\tau \right.$$

$$\le 2^{p-1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \left\{ \int_0^1 \int_0^t \left| \frac{\partial u(t,\tau)}{\partial x_2} \right|^p d\tau\, dt + \int_0^1 \int_\tau^1 \left| \frac{\partial u(t,\tau)}{\partial x_1} \right|^p dt\, d\tau \right\} =$$

$$= 2^{p-1} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_D \left(\left| \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|^p + \left| \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|^p \right) dx_2\, dx_1$$

6.8.10.

$N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$, $p > 1$, $Q = (-1,1)^{N-1}$

$$A_i(u) = \underbrace{\int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1}_{N-1} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_{N-1}) - u(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau, x_{i+1}, \dots, x_{N-1})}{t - \tau} \right|^p dt\, d\tau\, dx \right.$$

Zachodzą następujące fakty

(i) Jeśli $u \in L_p(\Omega)$ i $A_i(u) < \infty$ dla $i = 1, \dots, N-1$, to $u \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(Q)$

(ii) $\exists_{c>0}\ \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(Q)} \le c \|u\|_{L_p(Q)} + \sum_{i=1}^{N-1} A_i(u)$

D-d:

$u \in L_p(Q)$

$$\int_Q \int_Q \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+p-2}} dx\, dy \le C_{p,N} \sum_{i=1} \iint_{Q\,Q} \frac{|u(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_{N-1}) - u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_{N-1})|^p}{|x-y|^{N+p-2}} dx\, dy$$

$$= (*)$$

$$F_i(x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_{N-1}) = \int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1} \frac{dx_{i+1}\dots dx_{N-1}\,dy_1\dots dy_{i-1}}{|x-y|^{N+p-2}}$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1}}_{N} |u(x_1,\dots,x_i,y_{i+1},\dots,y_{N-1}) - u(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,\dots,y_{N-1})|^p F_i(x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_{N-1})\,dx_1 dx_2\dots dx_i dy_i\dots dy_{N-1}$$

$= \text{suma całek w } (*)$

$$\Downarrow \quad F_i(x_1,\dots,x_i,y_i,\dots,y_{N-1}) \le \frac{\tilde{C}}{|x_i-y_i|^p}$$

Wstawiając

$$\int_Q\int_Q \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+p-2}}\,dxdy \le \tilde{C}\sum_{i=1}^{N-1} A_i^p(u)$$

$$\left(\|u\|^p_{L^p(Q)} + \sum_{i=1}^{N-1} A_i^p(u)\right)^{1/p} \sim \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(Q)}$$

$$A_i^p(u)^{1/p} \simeq L_p(Q_i^{N-2}; W_p^{1-\frac{1}{p}}((0,1)_{x_i}))$$

$$W_p^{1-\frac{1}{p}}((0,1)_{x_i}; L_p(Q_i^{N-2}))$$

Tw. 6.8.2.

$Q=(-1,1)^N$, Q_k

$p>1$

wtedy istnieje jedyny, ograniczony operator liniowy

$$R: W^{1,p}(Q) \longrightarrow W_p^{1-\frac{1}{p}}(Q_k), \quad \text{t. że}$$

$$\forall u\in C^\infty(\bar{Q}) \qquad Ru = u|_{Q_k}$$

D-d: Chcemy $\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(Q_k)} \le M\|u\|_{W^{1,p}(Q)}$, $u\in C^\infty(\bar{Q})$

z lematu $\|u\|^p_{L_p(Q_k)} + \sum A_i^p(u) \le M\|u\|^p_{W^{1,p}(Q)}$

$$W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

$$1\le p<N, \quad q=\frac{Np-p}{N-p}$$

$$\|u\|_{L_p(\partial Q)} \le \|u\|_{L_q(\partial Q)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(Q)}, \quad q>p$$

$$\|u\|^p_{L_p(Q_k)} \le M_1\|u\|^p_{W^{1,p}(Q_k)}$$

z lematu 6.8.9.

$$A_i^p(u) \le C\underbrace{\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1}}_{N-2}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^p + \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right|^p\right\}dx_i dx_k\right) \le C\|u\|^p_{W^{1,p}(Q)}$$

Twierdzenie:

$p > 1$, $\Omega \in C^{0,1}$. Wtedy istnieje jedyny operator liniowy

$$R : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \quad \text{t. że}$$

$$Ru = u|_{\partial\Omega} \quad \text{dla} \quad u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

D-d:

Można dobrać opis $\partial\Omega$ t. że $\beta = 2\alpha$, $\Delta r \times (0,\beta)$ jest kostką o krawędzi 2α i $\Delta r \times \{0\}$ jest jedyną ścianą tej kostki. Niech $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$$\|u\|^p_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = \sum_{r=1}^{m} \|{}_r u\|^p_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Delta r)} \leq$$

$$\leq C^p \sum_{r=1}^{m} \|{}_r u\|^p_{W^{1,p}(\Delta r \times (0,\beta))} \leq C^p C' \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$$