SRS – zarezerwować lepszą salę

8. X. 2012.

Niech $f: X \to \mathbb{R}$, X – przestrzeń z miarą μ, $f \geq 0$

Definiujemy funkcję przestawienia, tak żeby

$$\lambda_f(t) := \mu(E_t := \{x : f(x) > t\}) = \lambda_{f^*}(t) = |\{s : f^*(s) > t\}|$$

$|\cdot|$ – miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$$

Uwaga: Gdy λ_f jest ściśle monotoniczna (zawsze jest nierosnąca), to f^* – odwrotna do λ_f.

$$f^*(t) = (\lambda_f)^{-1}(t)$$

Mamy:

$$\int_X |f|^p d\mu = p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t)\, dt = p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{f^*}(t)\, dt = \int_0^\infty |f^*|^p dt$$

ogólnie dla φ: $\varphi(0) = 0$, φ – ciągła

$$\int \varphi(|f|)\, d\mu = \int_0^\infty \varphi'(t) \lambda_{|f|}(t)\, dt \Rightarrow \int \varphi(|f|)\, d\mu = \int \varphi |f^*(t)$$

– zasada Cavalieriego

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f^*(\tau)\, d\tau = \sup_{s \in I} \int_I f^*(\tau)\, d\tau = Mf^* \geq f^*$$

(sup jest brane po I)

średnia największa, gdy $I = [0, s]$

Lemat: Jeśli $f \in L^1_+(X)$, to (L^1_+ – nieujemne L^1)

$$f^{**}(s) = \sup_{\substack{E \subseteq X \\ \mu(E) = s}} \int_E f\, d\mu, \quad \int_X f\, d\mu = \int_0^\infty f^*\, ds$$

⇧ Uzupełnić poniższy dowód

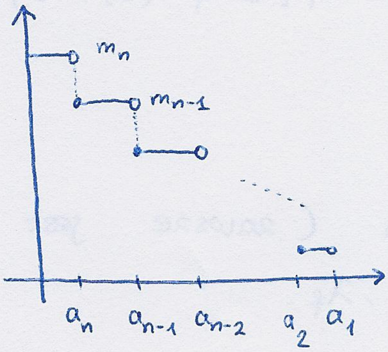
Dygresja: Jeśli f – schodkowa, to f ma dwie reprezentacje

I $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, E_i – rozłączne, $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0 := a_{n+1}$

II $\quad f = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{F_i} \quad : \quad F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n = \bigcup_{i=1}^{k} E_i \quad , \; b_k = a_k - a_{k+1} \geq 0$

$$\lambda_f = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \chi_{[a_{j+1}, a_j)} \quad , \quad m_i = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_j)$$

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} a_j \, \chi_{[m_{j-1}, m_j)}$$



bierzemy $\quad m_{n-3} \leq s < m_{n-2}$

$\lambda_f(t) \leq s$ dla $t \geq a_{n-2}$

inf po takich t to a_{n-2}

$f^*(s) = a_k$ dla $s \in [m_{k-1}, m_k)$

$$f^*(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{[m_{i-1}, m_i)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{II reprezentacja}}}{=} \sum_{i=1}^{n} b_i \, \chi_i$$

$$F_j = \bigcup_{i=1}^{j} \underbrace{[m_{i-1}, m_i)}_{E_j} = [0, m_j)$$

D-d lematu:

$f = \sum b_j \chi_{F_j}$

$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$

$$\int_E f \, d\mu = \sum_j b_j \, \mu(E \cap F_j) \leq \sum_j b_j \underbrace{\min(\mu(E), \mu(F_j))}_{= \int_0^{\mu(E)} \chi_{[0, \mu(F_j))} ds} =$$

$$= \int_0^{\mu(E)} \sum_j b_j \, \chi_{[0, \mu(F_j))} = \int_0^{\mu(E} f^*(s)$$

dla $\mu(E) = s$

$$\int_E f \, d\mu \leq \frac{1}{s} \int_0^s f^*(\tau) \, d\tau = f^{**}(s)$$

⇧ Rozważając $\quad s \in (m_{j-1}, m_j) \quad$ pokazać, że $\quad \sup\{ \int_E f \, d\mu : \mu(E) = s \} =$

$$= \int_0^s f^* \, dt$$

Fakt:

$$f^{**}(s) = \sup_{\substack{E \subseteq X \\ \mu(E)=s}} \int_E |f| \, d\mu = \sup_{\substack{E \subseteq X \\ \mu(E) \geq s}} \int_E f \, d\mu$$

Dowód: „ $\leq$ " jest zawsze

Dowodzimy „ $\geq$ "

g^* - nierosnąca $\Rightarrow$ dla $r \geq t$ $\int_0^r g^* \leq \int_0^t g^*$

stąd, gdy $\mu(E) \geq t$

$$\sup_E \int_E f \leq \int_0^{\mu(E)} f^* \leq \int_0^t f^* = f^{**}(t)$$

Twierdzenie: (Nierówność Hardy'ego - Littlewooda)

$f^{**} \sim f$ w L^p

$\exists \, c_1, c_2 > 0 \ : \ \forall f$

$$c_1 \int_X |f|^p \, d\mu \leq \int_0^\infty |f^{**}|^p \, dt \leq c_2 \int_X |f|^p \, d\mu$$

Dowód:

Lewa $= c_1 \int_0^\infty |f^*|^p \, dt \leq c_1 \int_0^\infty |f^{**}|^p \, dt = c_1 \int_0^\infty |Mf^*|^p \, dt \overset{H-L}{\leq}$

$$\leq c_2 \int |f^*|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu$$

$[\ \int |Mf|^p \leq c \int |f|^p \ , \ 1 < p < \infty \ ]$

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds \right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f^*|^p \, ds$$

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_0^t g(s) \, ds \right|^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p c_p \int_0^\infty |g^*| \, ds$$

Fakt: Dla dowolnych funkcji mierzalnych, nieujemnych na X:

$$\int_X f \cdot g \, d\mu \leq \int_0^\infty f^* g^* \, dt$$

D-d: wystarczy dla funkcji schodkowych

$$f = \sum_{k=1}^{N_1} a_k \chi_{A_k} \quad , \quad g = \sum_{k=1}^{N_2} b_k \chi_{B_k}$$

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq$, b_k - niekoniecznie uszeregowane

1° Można założyć : $A_k = B_k$ - rozważamy wszystkie przecięcia : $A_i \cap B_j$ i zmieniamy numerację

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k} \quad , \quad g = \sum_{k=1}^{N} b_k \chi_{A_k}$$

2° Można założyć, że $\mu(A_i)$ ~~mają~~ należą do ~~korke~~ ~~w~~ zbioru

$\{ \frac{q}{2^k} : k \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \}$ - argument gęstościowy

$$\int f \cdot g = \sum a_i b_k \mu (A_k)$$

3° Można : $\mu(A_i) = \{ \frac{q}{2^R} : R \in \mathbb{N} , q \in \mathbb{N} \} \quad \forall_i$

4° $A_i = \bigcup_{j=1}^{q} A_{i,j}$, gdzie $\mu(A_{i,j}) = \frac{1}{2^R} \quad \forall_j$

wystarczy pokazać

Fakt: Jeśli $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_N \geq 0$

$b_1, \ldots, b_N$ - dowolne ≥ 0

$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i$ - największa, gdy $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$

$\langle a, b \rangle = \langle a, b^* \rangle$, $b^* = (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(N)})$

$a = (a_1, \ldots, a_N)$, $b = (b_1, \ldots, b_N)$ $\quad$ σ - permutacje porządkujące

$b_{\sigma_1} \geq b_{\sigma(2)} \geq \ldots$

$N=2$ $\quad$ a_i - różne

b_i - różne

$$\langle a, b \rangle = |a| \cdot |b| \cdot \underbrace{\cos(\vec{a}, \vec{b})}_{\text{najw. gdy } \in I}$$

$b_1 > b_2$