15. X. 2012

Def: (ułamkowe przestrzenie sobolewa) [Sobolewa - Słobodeckiego]

$k>0$, $k \notin \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ - ograniczony

$W^{k,p}(\Omega)$ - podprzestrzeń składająca się z tych $u \in W^{[k],p}(\Omega)$,

dla których $\underset{|\alpha|=[k]}{I_\alpha(u)} = \iint_{\Omega\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+p(k-[k])}} dx dy < \infty$

z normą $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W^{[k],p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[k]} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}}$

$W^{k,p}(\Omega)$ - unormowana przestrzeń liniowa

$W^{k,p}(\Omega) \subset W^{[k],p}(\Omega)$

Tw: $k>0$, $k \notin \mathbb{N}$, $p \geq 1$

(i) $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha

(ii) $W^{k,p}$ jest ośrodkowa dla $p \geq 1$ i refleksywna dla $p > 1$

$A: W^{k,p} \to L^p(\Omega)$

$x = (x_1, \dots, x_N)$

Def: $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0,1]$, $\mathbb{R}^N \supset \Omega \in C^{k,\lambda}$, gdy istnieją

(i) m kartezjańskich układów współrzędnych x_r $(r = 1, 2, \dots, m)$

$x_r(x_{r,1}, \dots, x_{r,N-1}, x_{r,N}) = (x_{r'}, x_{r,N})$, gdzie

$x_{r'} = (x_{r,1}, \dots, x_{r,N-1})$

(ii) liczba $\alpha > 0$ i m funkcji

$a_r \in C^{k,\lambda}(\bar{\Delta}_r)$, $r = 1, \dots, m$, gdzie

$\Delta_r = \{ x_{r'} : x_{r_i} \in (-\alpha, \alpha) : i = 1, \dots, N-1 \}$

(iii) liczba $\beta > 0$ t. że

(I) zbiory $\Lambda_r = A_r^{-1}(\{ X_r = (x_{r'}, x_{r,N}) : x_{r'} \in \Delta_r$ i $x_{r_N} = a_r(x_{r'}) \})$

($A_r : X_r \to X_r$ transformacja współrzędnych)

są podzbiorami $\partial\Omega$ dla $r = 1, \dots, m$ i $\partial\Omega = \bigcup_{r=1}^{m} \Lambda_r$

(II) $r = 1, \dots, m$ $U_r^+ = A_r^{-1}(\{ X_r = (x_{r'}, x_{r,N})$: $x_{r'} \in \Delta_r$ i $a_r(x_{r'}) < x_{r_N} < a_r(x_{r'}) + \beta \})$

- otwarte podzbiory Ω

15. X. 2012

Def: (ułamkowe przestrzenie Sobolewa) [Sobolewa – Słobodeckiego]

$\kappa > 0$, $\kappa \notin \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ograniczony

$W^{\kappa,p}(\Omega)$ – podprzestrzeń składająca się z tych [illegible]

dla [illegible]

[illegible]

Def: $r = 1, \dots, m$

$$Q_r : \bar{\Delta}_r \times [-\beta, \beta] \to \mathbb{R}^N$$

$$Q_r(x_r', \xi) = (x_r', a_r(x_r') + \xi)$$

Teraz $A_r^{-1} \circ Q_r$ jest „1-1" z $\Delta_r \times (-\beta, \beta)$ na U_r, $\Delta_r \times (0, \beta)$ na U_r^+, $\Delta_r \times [0, \beta)$ na $\Lambda_r \cup U_r^+$

${}_r u$ określamy na $Q_r^{-1} \circ A_r(M)$, $M \subset U_r$

$${}_r u = u \circ A_r^{-1} \circ Q_r$$

Def: $G \subset \partial\Omega$ jest podzbiorem zerowym

$$\forall_{r \in \{1,\dots,m\}} \quad \mu_{N-1}\left(\{Q_r^{-1} \circ A_r(G \cap \Lambda_r)\}\right) = 0$$

Def: u określona p.w. na $\partial\Omega$ należy do $L_p(\partial\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$

$$\forall_{r \in \{1,\dots,m\}} \quad {}_r u \in L_p(\Delta_r)$$

$$\Omega \in C^{0,1} \qquad \|u\|_{L_p(\partial\Omega)} = \left(\sum_{r=1}^{m} \int_{\Delta_r} |{}_r u(x_r', 0)|^p \, dx_r'\right)^{1/p}$$

<u>Nierówność Hardy'ego:</u>

$a, b \in \mathbb{R}$, $u \in L_p(a,b)$, $p > 1$

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x-a} \int_a^x |u(y)| \, dy\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p \, dx$$

Pokażemy najpierw, że dla $\Omega = Q = (-1,1)^N$ istnieje stała $M > 0$

$$\forall_{u \in C^\infty(\bar{Q})} \quad \text{mamy} \quad \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(Q)} \leq M \|u\|_{W^{1,p}(Q)}$$