Zadania z Analizy Matematycznej I.1- seria X

7 stycznia 2014

Zadanie 1. Wykazać z definicji, że $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

Zadanie 2. Dobrać parametry $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ tak, żeby następujące funkcje były ciągłe

a) $f(x) = \begin{cases} 2 + e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{dla } x > 0, \\ \lim_{x\to 0^-} 2 + e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x = 0, \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{dla } x < 0, \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ c & \text{dla } x = 1, \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$

Zadanie 3. Obliczyć granice

a) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$, gdzie $a > 1,\ \alpha \in \mathbb{R}$,

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\sqrt{x}}}$,

d) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$,

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{|\sin(x)|}}$,

f) $\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$,

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos(x))}{\sin(\sin(x))}$.

Zadanie 4. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

Zadanie 5. Określić w $x = 0$ funkcję

$$f(x) = \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2},$$

tak aby była ciągła.

Zadanie 6. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że f ma punkt stały, to znaczy istnieje $x \in [0,1]$ takie że $f(x) = x$.