Zadania z Analizy Matematycznej I.1- seria XI

23 stycznia 2014

Zadanie 1. Udowodnć, że funkcja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, która jest ciągła na $[a, \infty)$ oraz która nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu na tym przedziale, przyjmuje każdą wartość nieskończenie wiele razy.

Zadanie 2. Niech dana będze funkcja ciągła $f : [0, 2] \to [0, 2]$, taka że $f(0) = f(2)$. Udowodnić, że istnieje wtedy taki punkt x, że $f(x) = f(x + 1)$.

Zadanie 3. Zbadać, które z podanych niżej funkcji są jednostajnie ciągłe na przedziale $(0, 1)$

a) $a(x) = e^x$,

b) $b(x) = \sin(1/x)$,

c) $c(x) = x \sin(1/x)$,

d) $d(x) = \ln x$

Zadanie 4. Zbadać, które z podanych funckji są jednostajnie ciągłe na przedziale $[0, \infty)$

a) $a(x) = \sqrt{x}$,

b) $b(x) = \sin^2 x$,

c) $c(x) = \sin(x^2)$,

d) $d(x) = e^x$.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funckją ciągłą mającą skończone granice $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Podać przykład funkcji $f : A \to \mathbb{R}$, która jest jednostajnie ciągła, ale nie spełnia warunku Lipschitza.

Zadanie 7. Pokazać, że dla dowolnego $M > 0$ funkcja $f : [-M, M] \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x^2$ spełnia warunek Lipschitza.

Zadanie 8. Pokazać, że funkcja $ln : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza.