SERIA 14

Twierdzenie (Pierwsze twierdzenie o wartości średniej (wariant)). Jeśli $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, $g \geqslant 0$, to istnieje $c \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie (Przybliżanie całki sumami całkowymi). Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $\varepsilon > 0$. Istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Zadanie 1. Załóżmy, że $f \in C(\mathbb{R})$ oraz że $a < b$. Obliczyć pochodną funkcji

$$g(x) = \int_a^b f(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 3. Obliczyć pochodne następujących funkcji

(a) $f(x) = \int_0^{x^2} t\sin t\,\mathrm{d}t$,
(b) $g(x) = \int_{-\sin x}^{\sin x} \ln(1-t^2)\,\mathrm{d}t$.

Zadanie 4. Obliczyć

(a) $\lim_{n\to\infty} \Big(n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1}\,\mathrm{d}x\Big)$,
(b) $\lim_{n\to\infty} \Big(n^3 \int_n^{2n} \frac{x}{x^5+1}\,\mathrm{d}x\Big)$.

Zadanie 5. Obliczyć następujące granice, wykorzystując całkę Riemanna z odpowiednio dobranej funkcji

(a) $\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}\Big)$,
(b) $\lim_{n\to\infty} n^2 \Big(\frac{1}{n^3+1^3} + \frac{1}{n^3+2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3+n^3}\Big)$,
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$.