SERIA 2

Zadanie 1. Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji w podanym punkcie:

(a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, $x_0 = 2$,
(b) $g(x) = -2x^3 + 5x$, $x_0 = -1$,
(c) $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$.

Zadanie 2. Obliczyć (jeżeli istnieje) $f'(1)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 1 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Zadanie 3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0 \\ x(x+1)^2 & \text{dla } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Sprawdzić, czy istnieje $f'(0)$.

Zadanie 4. Wyznacz stałe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ w taki sposób, żeby f była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{jeśli } x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{jeśli } 0 < x < 1, \\ 3 - 2x & \text{jeśli } x \geqslant 1, \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{jeśli } x \leqslant 0, \\ cx^2 + dx & \text{jeśli } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{jeśli } x > 1. \end{cases}$$

Zadanie 5. Zakładając, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, obliczyć granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika, że $f'(x_0)$ istnieje?

Zadanie 6. Niech $f(z) = \bar{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$. Wykazać, że f nie ma pochodnej zespolonej w żadnym punkcie $a \in \mathbb{C}$.

Zadanie 7. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = |x|^3$.

Zadanie 8. Załóżmy, że f i g są różniczkowalne w punkcie a. Znaleźć

(a) $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$,
(b) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$.

Zadanie 9. Załóżmy, że f jest różniczkowalna w punkcie a. Znaleźć następujące granice:

(a) $\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)e^x - f(a)}{f(x)cos(x) - f(a)}$, $a = 0$, $f'(0) \neq 0$.

(c) $\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right) + f\left(a+\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(a+\frac{k}{n}\right) - kf(a)\right)$, $k \in \mathbb{N}$.