Zadania z Analizy Matematycznej I.1 - seria III

Zadanie 1. Korzystając z definicji granicy udowodnić, że:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0$;

c) $\lim_{n\to\infty} \log(\log n) = \infty$.

Zadanie 2. Sprawdź czy następujące ciągi są ograniczone i monotoniczne:

a) $a_n = \frac{n}{2^n}$;

b) $b_n = \frac{2^n}{n!}$.

Zadanie 3. Znaleźć granicę ciągu:

a) $a_n = \frac{3n-11n^2}{5n^2-1}$;

b) $b_n = \frac{n+11n^2}{5n^6-2}$;

c) $c_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{6n^3-n^2+2n+1}$;

d) $d_n = \frac{1+2+...+n}{n+2} - \frac{n}{2}$;

e) $e_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$;

f) $f_n = \frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$.

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność ciągu i znajdź jego granicę, jeśli istnieje:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$;

b) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$;

c) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$.

Zadanie 5. Pokazać, że jeśli $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, zaś $\{b_n\}$ ciągiem zbieżnym do zera, to $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Zadanie 6. Zbadać zbieżność ciągu $a_n = a^n$ dla $a \in \mathbb{R}$.