Zadania z Analizy Matematycznej I.1 - seria V

Zadanie 1. Pokazać, że jeśli dla ciągu $\{a_n\}$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, to

- jeśli $q < 1$ to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
- jeśli $q > 1$ to $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Zadanie 2. Obliczyć granice ciągów:

a) $a_n = \frac{2^n}{n!}$,

b) $b_n = \frac{n^k}{C^n}$, gdzie k i C są ustalone, $k \in \mathbb{N}$, $C > 1$,

c) $c_n = \frac{n}{\ln(n!)}$,

d) $d_n = \sqrt[n]{n!}$

Zadanie 3. Udowodnić, że ciągi $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ oraz $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ są zbieżne i to do tej samej granicy.

Zadanie 4. Obliczyć

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}$,

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}$,

d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$,

e) $\lim_{n\to\infty}\left(0,999999+\frac{1}{n}\right)^n$,

f) $\lim_{n\to\infty}\left(1,00001+\frac{1}{n}\right)^n$,

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$,

h) $\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$.

Zadanie 5. Wykazać, że

a) Jeśli $na_n \to 0$ to $(1+a_n)^n \to 1$.

b) Jeśli $na_n \to g$, $g < \infty$, to $(1+a_n)^n \to e^g$.