Zadania z Analizy Matematycznej I.1- seria VIII

13 grudnia 2013

Zadanie 1. Pokazać, że

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(ka) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ka) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$

dla $a \neq 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność bezwzględną szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+\ln^2 n}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$,

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n}$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}}{n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\ln n\rfloor}}{n}$, w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$

Zadanie 4. Dla $a \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n}$$

Zadanie 5. Pokazać, że wyrazy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

możemy przestawić tak, żeby suma się dwukrotnie zmniejszyła. Przestawić wyrazy szeregu tak, aby otrzymać szereg rozbieżny.