Zadania z Analizy Matematycznej I.1- seria IX

7 stycznia 2014

Zadanie 1. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \text{ dla } |z|<1.$$

Zadanie 2. Znaleźć iloczyn Cauchy'ego następujących szeregów:

a) $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$, $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$;

b) $A=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, $B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$;

c) $A=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$, $B=A$, $x\in\mathbb{R}$.

W podpunktach a) i b) obliczyć sumy otrzymanych szeregów.

Zadanie 3. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ jest iloczynem Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ przez siebie i znaleźć jego sumę.

Zadanie 4. Udowodnić, że iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów o wyrazach dodatnich, z których co najmniej jeden jest rozbieżny, jest zawsze szeregiem rozbieżnym.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ przez siebie.