SERIA 10

Twierdzenie. Dla dowolnego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ istnieje $R \in [0,\infty]$ takie, że

(1) szereg ten jest zbieżny bezwzględnie, jeśli $|x-x_0| < R$, a jeśli $|x-x_0| > R$, to jest rozbieżny,

(2) $R = \sup\{r \in [0,\infty) \colon \text{ciąg } \{|a_n|r^n\} \text{ jest ograniczony}\}$,

(3) $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, przy czym przyjmujemy, że $\frac{1}{0} = +\infty$ i $\frac{1}{\infty} = 0$.

Liczbę R nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Zadanie 1. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\operatorname{tg} x)^n$

Zadanie 2. Załóżmy, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wynosi R, przy czym $0 < R < \infty$. Znaleźć promień zbieżności szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n a_n x^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$.

Zadanie 3. Znaleźć promień zbieżności R szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

oraz wykazać, że jego suma spełnia równanie $f'(x) = 1 + xf(x)$ dla $x \in (-R,R)$.

Zadanie 4. Niech $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $n = 0,1,2,\ldots$ i niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wykazać, że jeśli $x_0 \in (-R,R)$ jest takim punktem, że dla każdego $n = 0,1,2,\ldots$ spełniona jest nierówność $S_n(x_0) < f(x_0)$, to $f'(x_0) \neq 0$.