SERIA 13

Zadanie 1. Obliczyć następujące całki oznaczone:

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x$,

(2) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \,\mathrm{d}x$,

(3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$,

(4) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$,

(5) $\int_{1/e}^{e} |\ln x| \,\mathrm{d}x$.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnych $p, q > 0$ zachodzi

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^q(1-x)^p \,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 3. Pokazać, że jeśli $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i nieparzystą dla pewnego $a > 0$ wówczas

$$\int_{-a}^{a} f(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Korzystając z tego obliczyć

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \mathrm{d}x.$$

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej na $[0,1]$ prawdziwa jest równość

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \,\mathrm{d}x.$$

Wykorzystując powyższą równość, obliczyć

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$