SERIA 15

Definicja. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, a $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}$ - ustalonym podziałem $[a,b]$. Definiujemy

$$G(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x_i)\cdot \Delta x_i, \quad D(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x_i),$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna jeśli

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} G(P,f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} D(P,f).$$

Zadanie 1. Wyprowadzić wzory rekurencyjne na następujące całki

$$\text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{c)} \int_0^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 2. Obliczyć z definicji całkę Riemanna:

$$\text{a)} \int_{-2}^{3} x^2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć z definicji całkę Riemanna

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

biorąc jakikolwiek ciąg podziałów przedziału $[1,2]$ i wybierając w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ punkt pośredni $t_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$.

Zadanie 4. Pokazać, że funkcja Dirichleta

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \text{ wymiernych} \\ 1 & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases}$$

nie jest całkowalna na przedziale $[0,1]$ w sensie Riemanna.

Zadanie 5. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana poprzed

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykazać, że $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.