SERIA 15

Twierdzenie. Załóżmy, że $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ jest funkcją klasy C^1. Wówczas długość krzywej φ wynosi

$$\int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Twierdzenie. Założmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1. Wówczas długość wykresu tej funkcji wynosci

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 1. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach

$$\text{a) } y = x^2,\ x = y^2 \quad \text{b) } y = \ln x,\ y = \ln^x$$

Zadanie 2. Obliczyć pole figury ograniczonej pętlą

$$y^2 = x(x-1)^2$$

Zadanie 3. Obliczyć długość wykresu

$$f(x) = \ln x, \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}].$$

Zadanie 4. Znaleźć długość części traktrysy danej parametrycznie

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \quad y = a \sin t$$

od punktu $(0,a)$ do punktu (x,y).

Zadanie 5. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej z obrotu krzywej $y = \operatorname{tg} x$, gdzie $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ wokół osi OX.

Zadanie 6. Obliczyć granice

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

Zadanie 7. Obliczyć granicę

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^{3t} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x.$$