

SERIA 17

Zadanie 1. Obliczyć następujące całki

- (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$,
- (b) $\int_0^1 x^n \ln^n(x) dx$,
- (c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność poniższych całek niewłaściwych

- (a) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$,
- (b) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$,
- (c) $\int_0^1 (-\ln x)^a dx$, $a \in \mathbb{R}$,
- (d) $\int_0^1 \frac{dx}{x^a(-\ln x)^b}$, $a, b \in \mathbb{R}$
- (e) $\int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^2 \sin^2 x}$.

Zadanie 3. Niech f będzie nieujemną i ciągłą funkcją na $[0, \infty)$, dla której

$$\int_0^\infty f(x) dx < \infty.$$

Udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx = 0.$$