SERIA 18

Twierdzenie (Kryterium Abela-Dirichleta zbieżności całek)**.** $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ciągłe

(1) Istnieje taka liczba $M > 0$, że dla wszystkich $x_2 > x_1 \geqslant a$ zachodzi

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M,$$

(2) g jest funkcją monotoniczną oraz $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Wówczas zbieżna jest całka

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie. Całka $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego rosnącego ciągu $\{a_n\}$, $a_n > a$ dążącego do $+\infty$ zbieżny jest szereg

$$(\star)\qquad \sum_{n=1}^\infty \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{gdzie } a_0 = a.$$

W przypadku zbieżności prawdziwa jest równość

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jeśli $f \geqslant 0$, wówczas warunkiem wystarczającym zbieżności jest istnienie rosnącego ciągu $\{a_n\}$ rozbieżnego do $+\infty$, dla którego zbieżny jest $(\star)$

Zadanie 1. Zbadać zbieżność całek

(a) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$,

(b) $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_1^\infty \ln^\alpha x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność całki w zależności od parametru $\alpha > 0$

$$\text{(a)} \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^\alpha x},$$

$$\text{(b)} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{(c)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^a \sin^2 x}.$$

Zadanie 3. Obliczyć następujące całki

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_0^n \frac{1-(1-x/n)^n}{x}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.