SERIA 4

Zadanie 1. Ile pierwiastków rzeczywistych mają równania:

(a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$;

(b) $e^x = ax^2$, w zależności od $a \in \mathbb{R}$;

(c) $x^5 - 5x = a$, w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Udowodnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest spełniona nierówność

$$2x \operatorname{arc\,tg} x \geqslant \ln(1 + x^2).$$

Zadanie 3. Wykazać, że dla $x \in [0, 1]$ oraz $p > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1.$$

Zadanie 4. Wykazać nierówność

$$\log_2 3 > \log_3 4.$$

Zadanie 5. Udowodnić nierówność

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \qquad \text{dla } 0 < b < a.$$

Zadanie 6. Wykazać nierówność

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}.$$

Zadanie 7. Niech $a \in \mathbb{R}$ i $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Udowodnić, że jeżeli $\lim_{x\to\infty} f'(x) = g$, to także $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = g$.

Zadanie 8. Wykazać, że funkcje $f(x) = \ln(1 + x)$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$ i $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$.

Zadanie 9. Załóżmy, że f jest dwukrotnie różniczkowalna na (a, b) i że istnieje takie $M \geqslant 0$, dla którego $|f''(x)| \leqslant M$ dla wszystkich $x \in (a, b)$. Wykazać, że f jest jednostanie ciągła na (a, b).

Zadanie 10. Czy funkcja $f(x) = \cos(e^x)$ jest jednostajnie ciągła

(a) na przedziale $(0, \infty)$;

(b) na przedziale $(-\infty, 0)$.