SERIA 5

Zadanie 1. Znaleźć równanie stycznej do wykresu $\sqrt{1-x^2}$ w punkcie $(a, \sqrt{1-a^2})$ i wykazać, że styczna do wykresu funkcji $\sqrt{1-x^2}$ w tym punkcie jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$ i $(a, \sqrt{1-a^2})$.

Zadanie 2. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ i narysować wykres.

Zadanie 3. Obliczyć następujące granice:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$,
(b) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,
(c) $\lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)}$,
(d) $\lim_{x\to\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$,
(e) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Zadanie 4. Udowodnić, że jeśli $|x| < \frac{1}{2}$, to przybliżony wzór

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

daje wartość $\sqrt{1+x}$ z błędem nie większym niż $\frac{1}{2}|x|^3$.

Zadanie 5. Udowodnić, że prawdziwe są następujące nierówności:

(a) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $x > 0$;
(b) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$, $x > 0$.

Zadanie 6. Załóżmy, że f jest funkcją klasy C^2 na $(0,\infty)$ i że

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0.$$

Udownodnić, że $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Zadanie 7. Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x^2) - \operatorname{tg} x \sin x}{x(\operatorname{tg} x - x)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2(x\sqrt{14})} - \cos(6x) - 8\sin^2(2x)}{(\sqrt[5]{1+5\operatorname{tg} 7x} - \sqrt[11]{1+11\sin x})^3 \ln(1+\operatorname{tg}(2x))}.$$