SERIA 6

Zadanie 1. Zbadać zbieżność jednostajną na przedziale $[0,1]$ określonych poniżej ciągów funkcyjnych $\{f_n\}$

(a) $f_n = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$,
(b) $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}$,
(c) $f_n(x) = x^n(1-x)$,
(d) $f_n(x) = nx^n(1-x)$,
(e) $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność jednostajną na A następujących ciągów $\{f_n\}$:

(a) $f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$, $A = \mathbb{R}$,
(b) $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$, $A = \mathbb{R}$,
(c) $f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}$, $A = \mathbb{R}$,
(d) $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1)$, $A = [1,a]$.

Zadanie 3. Niech f będzie dowolną funkcją określoną na odcinku $[a,b]$ i niech $f_n(x) = \frac{\lfloor nf_n(x)\rfloor}{x}$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma pochodną f' jednostajnie ciągłą na $\mathbb{R}$. Wykazać, że

$$n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right) \to f'(x)$$

jednostajnie na $\mathbb{R}$. Podać przykład wskazujący na to, że założenie jednostajnej ciągłości pochodnej jest istotne.

Zadanie 5. Wykazać, że granicą jednostajnie zbieżnego na $\mathbb{R}$ ciągu wielomianów jest wielomian.