

SERIA 7

Twierdzenie (Twierdzenie Diniego).

- (1) Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem zwartym oraz funkcje $f, f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe. Załóżmy ponadto, że $f_n \rightarrow f$ punktowo na K oraz

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \quad \text{na } K.$$

Wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na K .

- (2) Załóżmy, że $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są niemalejące i ciąg (f_n) jest punktowo zbieżny na $[a, b]$ do funkcji ciągłej f . Wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Definicja. Mówimy, że szereg funkcji $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)$ jest zbieżny punktowo (jednostajnie) do $f(x)$ na zbiorze X wtedy i tylko wtedy gdy ciąg sum częściowych $S_n = \sum_{k=k_0}^n f_k(x)$ jest zbieżny punktowo (jednostajnie) do f na X .

Twierdzenie (Kryterium Weierstraßa). Niech $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Jeśli $|f_n(x)| \leq a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ są zbieżne jednostajnie na X .

Zadanie 1. Wykazać, że w Twierdzeniu Diniego założenia: ciągłość (f_n) , ciągłość f , punktowa monotoniczność (f_n) oraz zwartość K są założeniami istotnymi.

Zadanie 2.

- (1) Załóżmy, że $\{f_n\}$ jest ciągiem jednostajnie zbieżnym na X do funkcji f . Załóżmy ponadto, że x_0 jest punktem skupienia zbioru X i istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ dla wszystkich n większych od pewnego n_0 . Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

- (2) Udowodnić także, że jeśli $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji jednostajnie zbieżnym do f na przedziale (a, ∞) i istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla wszystkich n większych od pewnego n_0 , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

- (3) Załóżmy, że $f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$ oraz szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X . Wykazać, że jeśli $x_0 \in X$ jest punktem skupienia zbioru X , to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

(Równości powyższe rozumiemy w ten sposób, że jeśli istnieje granica po jednej stronie równości, to istnieje też granica po drugiej stronie równości i są one równe.)

Zadanie 3. Pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[a, \infty)$ dla $a > 1$.

Zadanie 4. Zbadać czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 1]$.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność jednostajną $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ na zbiorze \mathbb{R} .

Zadanie 6. Wyznaczyć sumę szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ i zbadać czy jest on zbieżny jednostajnie na zbiorze \mathbb{R} .

Zadanie 7. Niech $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Wykazać, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[1, \infty)$ mimo, że nie ma tutaj zastosowania kryterium Weierstraßa.

Zadanie 8. Wykazać, że

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln 2$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = 1$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \frac{\pi^2}{6}$.