SERIA 8

Twierdzenie (Kryterium Dirichleta)**.** Załóżmy, że funkcje $f_n, g_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ spełniają następujące warunki:

(1) dla dowolnego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny,
(2) ciąg $(f_n(x))$ jest jednostajnie zbieżny do zera na zbiorze X,
(3) ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ jest jednostajnie ograniczony na X.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze X.

Twierdzenie (Kryterium Abela)**.** Załóżmy, że funkcje $f_n, g_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, spełniają następujące warunki:

(1) dla dowolonego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny,
(2) ciąg $(f_n(x))$ jest jednostajnie ograniczony na X,
(3) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze X.

Zadanie 1. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ jest zbieżny na $\mathbb{R}$ i jego sumą jest funkcją ciągła na $\mathbb{R}$. Zbadać zbieżność jednostajną tego szeregu.

Zadanie 2. Udowodnić zbieżność jednostajną na zbiorze X następujących szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $X = [\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)\sin(nx)}{n+x^2}$, $X = \mathbb{R}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$, $X = [a, \infty)$, $a > 0$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} \operatorname{arc\,tg}(nx)$, $X = \mathbb{R}$.