SERIA 9

Twierdzenie. Załóżmy, że:

(1) $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne;
(2) Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$ do funkcji g;
(3) Istnieje taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny.

Wówczas:

(1) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$;
(2) Funkcja f jest różniczkowalna na $[a,b]$ i $f' = g$.

Zadanie 1. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad \text{dla } x \in [0,\infty).$$

Udowodnić, że f jest różniczkowalna na $[0,\infty)$. Znaleźć $f'(0)$, $f'(1)$ oraz $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

Zadanie 2. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić, że $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Zadanie 3. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \in [0,\infty).$$

Udowodnić, że $f \in C([0,\infty))$ i $f \in C^\infty((0,\infty))$ oraz, że $f'(0)$ nie istnieje.

Zadanie 4. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2+n^2}$$

jest określona i ciągła na $\mathbb{R}$. Zbadać jej różniczkowalność.