Zad 2 seria 17

c) $\int_0^1 (-\ln x)^a \, dx$, $a \in \mathbb{R}$

stosujemy podstawienie

$-\ln x = t$, $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t} dt$,

$t_0 = +\infty$, $t_1 = 0$

$$\int_0^1 (-\ln x)^a dx = \int_{+\infty}^{0} t^a (-e^{-t}) \, dt = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 t^a e^{-t} dt} + \int_1^{\infty} t^a e^{-t} dt$$

Funkcja $f(t) = t^a e^{-t}$ jest ciągła na $(0,1]$

oraz $\lim\limits_{t \to 0} \frac{t^a e^{-t}}{t^a} = 1$

zatem zbieżność całki $\int_0^1 t^a e^{-t} \, dt$ jest równoważna zbieżności całki $\int_0^1 t^a \, dt$, ta ostatnia jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $a > -1$.

Funkcja $f(t) = t^a e^{-t}$ jest ciągła na $(1, \infty)$

oraz

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^a e^{-t}}{t^{-2}} = \lim_{t \to +\infty} t^{a-2} e^{-t} = 0$$

zatem ze zbieżności całki

$\int_1^\infty t^{-2}\, dt$ wynika zbieżność całki

$\int_1^\infty t^a e^{-t}\, dt$.

Ostatecznie całka z zadania jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $a > -1$.