Wypukłość funkcji cz. I

1. Wykaż wklęsłość funkcji $\sin x$ na przedziale $[0, \pi]$ oraz funkcji $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$.
2. Wykaż, że dla wszystkich $n > 2$ zachodzi nierówność
$$(1+n)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1.$$
3. Wykaż, że dla $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ zachodzi nierówność
$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x < \sin x.$$
4. Udowodnij, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła i ograniczona, to jest stała.
5. Wykaż, że jeśli $f : I \to \mathbb{R}$ (I - przedział) jest ściśle rosnąca i wypukła, to funkcja odwrotna do niej jest wklęsła.
6. Wykaż, że spośród wszystkich n-kątów wpisanych w okrąg o ustalonym promieniu największy obwód ma n-kąt foremny.
7. Niech $a, b, c \in [0, 1)$. Wykaż, że
$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{3}{1-\sqrt[3]{abc}}.$$
8. Udowodnij, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$
9. Niech p będzie ustaloną liczbą większą od 1, zaś n dowolną liczbą naturalną. Wykaż, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p}.$$
10. Udowodnij, że ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt[5]{n^4}}$.