

PRACA DOMOWA 4

Z poniższych zadań należy wybrać 5 zadań

Zadanie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha = \frac{\pi}{n}$ i niech W będzie $2n$ -kątem, którego wierzchołki stanowią punkty

$$\begin{aligned}w_1 &= \langle \cos(\alpha), \sin(\alpha) \rangle \\w_2 &= \langle \cos(\alpha) + \cos(2\alpha), \sin(\alpha) + \sin(2\alpha) \rangle \\&\vdots \\w_{2n} &= \left\langle \sum_{k=1}^{2n} \cos(k\alpha), \sum_{k=1}^{2n} \sin(k\alpha) \right\rangle.\end{aligned}$$

- (1) Narysuj W .
- (2) Znajdź średnicę W .
- (3) Wywnioskuj, że $\sup_{x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \sin(kx) = +\infty$.

Zadanie 2 (4*0.25p). Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności następujących szeregów:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$,
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) (x-3)^n$.

Wyznaczyć promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n} x^n$,
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$.

Zadanie 3. Wykazać, że dla $|x| \leq 1$ prawdziwy jest wzór

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n.$$

Zadanie 4 (2*0.33p + 0.34p). Rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu zera funkcje:

- (1) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$, $x \in (-1, 1)$,
- (2) $f(x) = \frac{1}{2+x}$, $x \in (-2, 2)$,
- (3) $f(x) = \cos^2(x) \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5 (8*0.125p). Policzyc następujące całki:

- (1) $\int \operatorname{ctg}^2(x) dx$,
- (2) $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1} dx$,
- (3) $\int x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$,
- (4) $\int \frac{\sin x}{3+2 \cos x} dx$,
- (5) $\int \frac{1}{x^4+4} dx$,

$$(6) \int \frac{\sin^2(x)}{1+\sin^2(x)} dx,$$

$$(7) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}} dx,$$

$$(8) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Zadanie 6. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ dla $x \in (0, 1)$. Wyraż $f(x) + f(1-x)$ przez funkcje elementarne.

Podpowiedź: Rozważ $f'(x)$.