

PRACA DOMOWA 5

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}{2 + \cos\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Zadanie 2. Wyznacz $x > 1$, dla którego wyrażenie

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{t-1}{32}\right) dt$$

przyjmuje najmniejszą wartość.

Zadanie 3. 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx.$$

2. Załóżmy, że $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx.$$

Zadanie 4. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale $[a, b]$ i taką, że f' jest całkowna na tym przedziale. Niech

$$\Delta_n = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

Znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} n\Delta_n$.

Zadanie 5. 1. Załóżmy, że funkcje f, g, f^2, g^2 są całkowne na przedziale $[a, b]$. Pokazać, że wówczas spełniona jest następująca nierówność:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Pokazać, że

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \sqrt{1,2}.$$