PRACA DOMOWA 6

Zadanie 1. Wykazać, że funkcją Riemanna określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną lub } x = 0, \\ \frac{1}{q}, & \text{jeśli } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}, \text{i liczby } p, q \text{ są względnie pierwsze} \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a, b]$.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną na $[0, 1]$, to

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Wykorzystując tę równość obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right), \quad \text{gdzie } k \geqslant 0.$$

Zadanie 3.

(a) Niech $f : [a, b] \to [0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że jeśli
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
to $f(x) = 0$ dla $x \in [a, b]$.

(b) Załóżmy, że $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz, że
$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^4(x)\,\mathrm{d}x.$$
Wykazać, że wówczas $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 1]$ lub $f(x) = 1$ dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 4. Znaleźć długość krzywej

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.$$

Podpowiedź: Zastosować podstawienie biegunowe $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ dla $r \geqslant 0$ oraz $t \in [0, 2\pi]$, wyznaczyć z równania r jako funkcję od t.

Zadanie 5. Obliczyć objętość stożka o wysokości h i o promieniu podstawy r.