PRACA DOMOWA 7

Zadanie 1. Załóżmy, że $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągiem funkcji ciągłych, zbieżnym puntowo do funkcji f na $[a,b]$, to jest

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{dla każdego } x \in [a,b].$$

Załóżmy też, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$. Czy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^1 \frac{x^a |\sin x|^b}{e^{x^2}-1}\,\mathrm{d}x,$$

gdzie $a, b > 0$ są ustalonymi parametrami.

Zadanie 3. Wyznaczyć zbiór parametrów $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ dla których zbieżna jest całka niewłaściwa

$$\int_0^1 \frac{(\sin x)^a (\ln(1+x))^b}{x^c \operatorname{tg}^d(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,\mathrm{d}x.$$