Zad 1. Jak zadania nie należy rozwiązać

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$

f - całkowalna w sensie Riemanna

Zauważmy, że

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{bo } f \text{ całkowalna w sensie Riemanna}}{=} \lim_{K\to\infty} \sum_{i=0}^{K} (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{i=0}^{K} (x_i - x_{i-1}) \lim_{n\to\infty} f_n(x_i)$$

$$\neq \lim_{n\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{i=0}^{K} (x_i - x_{i-1}) f_n(x_i)$$

$$\underset{\text{bo } f_n \text{ są ciągłe}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_K = b$ jest dowolnym podziałem odcinka $[a,b]$

Powyższe rozumowanie nie jest poprawne ze względu na brak równości oznaczonej na czerwono

Poprawne rozwiązanie: wskazać kontrprzykład

weźmy np. $[a,b] = [0,1]$

oraz

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2\left(\frac{1}{2n} - |x - 1/2n|\right), & x \in [0, 1/n] \\ 0 & , x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \text{ (punktowo, ale nie jednostajnie)}$$

Wówczas funkcja $f(x) = 0$ jest całkowalna w sensie Riemanna $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Tymczasem łatwo sprawdzić, że $\forall_n$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

Zad 2.

$$\int_0^1 \frac{x^a |\sin x|^b}{e^{x^2}-1}\, dx$$

zauważmy, że $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = 1$

oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|^b}{x^b} = 1$,

a więc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^a |\sin x|^b}{e^{x^2}-1}}{x^a \cdot x^b \cdot x^{-2}} = 1.$$

zatem z kryterium porównawczego

$\int_0^1 \frac{x^a |\sin x|^b}{e^{x^2}-1}\, dx$ jest zbieżna

$$\Updownarrow$$

$\int_0^1 x^{a+b-2}\, dx$ jest zbieżna

$$\Updownarrow$$

$a+b-2 > -1 \iff a+b > 1$

Zad 3.

$$\int_0^1 \frac{(\sin x)^a \; (\ln(1+x))^b}{x^c \; tg^d x} \, dx$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

oraz $\lim_{x\to 0} \frac{x}{tg\, x} = 1$

Stąd

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{(\sin x)^a \; (\ln(1+x))^b}{x^c \; tg^d x}}{\dfrac{x^a \, x^b}{x^c \, x^d}} = 1$$

Zatem z kryterium porównawczego zbieżność całki

$$\int_0^1 \frac{(\sin x)^a (\ln(1+x))^b}{x^c \; tg^d x} \, dx$$

jest równoważna zbieżności całki

$$\int_0^1 x^{a+b-c+d}\,dx,$$

ta ostatnia jest zbieżna $\iff a+b-c-d>-1$.

<u>Zad 4.</u>

$$\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$$

Funkcja $\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}$ jest nieujemna i ciągła na $[0,1]$

stąd $0 \le \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx < \infty$.

Tymczasem

$$\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx \geq \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx \geq \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\,dx$$

ta ostatnia jest rozbieżna a zatem całka z zadania jest rozbieżna.

Twierdzenie (kryterium porównawcze)

Załóżmy, że 1) $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $g: [a,b) \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi

2) $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in [a,b)$

3) Istnieje granica

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad K \in [0, +\infty]$$

wówczas

1) Jeśli $K \in (0, +\infty)$ to zbieżność $\int_a^b f(x)\,dx$ jest równoważna zbieżności całki $\int_a^b g(x)\,dx$

2) Jeśli $K < +\infty$ to ze zbieżności $\int_a^b g(x)\,dx$ wynika zbieżność całki $\int_a^b f(x)\,dx$

3) Jeśli $K > 0$ to z rozbieżności całki $\int_a^b g(x)\,dx$ wynika rozbieżność całki $\int_a^b f(x)\,dx$.