

## Praca domowa X - Analiza Matematyczna I.1

**Zadanie 1.** Obliczyć następujące granice:

a)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{8-x}{\sin(\frac{1}{8}\pi x)},$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}.$

**Zadanie 2.** Niech

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$$

Zbadać ciągłość tej funkcji.

**Zadanie 3.** Znaleźć punkty ciągłości następujących funkcji

a)  $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą wymierną,} \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

b)  $R(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \\ \frac{1}{q} & \text{gdy } x = \frac{p}{q} \text{ (ten ułamek jest nieskracalny)} \end{cases}$

**Zadanie 4.** Niech  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągłą, gdzie  $I$  jest przedziałem. Pokazać, że funkcja  $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , określona wzorem

$$\bar{f} = \sup\{f(t) : t \leq x\},$$

jest ciągła i rosnąca na  $I$ .

**Zadanie 1\*.** Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, a ponadto równość  $f(f(x)) = x$  zachodzi dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Udowodnij, że równanie  $f(x) = x$  ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

**Zadanie 2\*.** Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia następującą równość

$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0, \quad \text{dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Udowodnij, że  $f$  nie jest funkcją ciągłą.