

Praca domowa II - Analiza Matematyczna I.1

Zadanie 1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_k oraz b_1, b_2, \dots, b_k zachodzi

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Zadanie 2. Znaleźć kresy zbioru

$$A = \left\{ \frac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 3. Udowodnić, że nierówność

$$n \left(\sqrt[n]{n+1} - 1 \right) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1} \right)$$

zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.