

Praca domowa III - Analiza Matematyczna I.1

Zadanie 1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n , $n \geq 2$, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2 - 1} < \frac{3}{4}.$$

Zadanie 2. Dla dowolnych liczb dodatnich a, b znaleźć największą wartość wyrażenia

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć

$$\inf \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 1*. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)\sqrt{i}} < 2$$

Zadanie 2*. Niech $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz kresy zbioru

$$A_n = \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \mid \sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Zadanie 3*. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, p, q takich, że $a \leq b$, $p \leq q$, zachodzi nierówność

$$(b^p - a^p)^q \leq (b^q - a^q)^p.$$