Praca domowa V - Analiza Matematyczna I.1

Zadanie 1. Oblicz granice

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\binom{n+1}{2}\sin(n!+n^2)$,
- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,
- $\lim_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{1/(2n+n\sin n)}$.

Zadanie 2. Niech $a_1=0$, $a_{n+1}=\frac{a_n+3}{4}$ dla $n\geq 1$. Wyznaczyć wzór na n-ty wyraz ciągu, udowodnić jego poprawność i znaleźć $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Zadanie 3. Pokazać, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach dodatnich spełnia warunek $a_{n+m}\leq a_n\cdot a_m$ dla $n,m=1,2,\ldots$, to ciąg $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ jest zbieżny do granicy właściwej.

Zadanie 1*. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{4} < \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}} < \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4^n}\right),$$

gdzie znak pierwiastka występuje w liczniku dokładnie n razy, a w mianowniku $n-1$ razy.

Zadanie 2*. Ciąg $\{a_n\}$ jest określony następująco:

$$a_1 = \frac{1}{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}} \text{ dla } n=1,2,3,\ldots$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < 1,03.$$

Zadanie 3*. Obliczyć

- $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$ dla $a>0$
- $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n}-1)$.