

## Praca domowa VI - Analiza Matematyczna I.1

**Zadanie 1.** Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}),$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n,$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}},$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}.$

**Zadanie 2.** Dowieść, że jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0,$  to szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.

**Zadanie 3.** Podać przykład szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  takiego, że

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln n = \infty,$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln(\ln n) = \infty$

**Zadanie 1\*.** Niech  $(a_n)_{n \geq 1}$  będzie ciągiem liczb dodatnich. Udownodnić nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Zadanie 2\*.** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right).$$

**Zadanie 3\*.** Wykazać, że jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  wówczas istnieje taki  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty,$  że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$