Praca domowa IX - Analiza Matematyczna I.1

Zadanie 1. Obliczyć iloczyn Cauchy'ego szeregów:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

gdzie

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} & \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

a następnie obliczyć sumę otrzymanego szeregu.

Zadanie 2. Obliczyć iloczyn Cauchy'ego szeregów:

a) $A = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$, gdzie $|a| < 1$,

b) $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}.$$

Zadanie 1*. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4 + 4}.$$

Zadanie 2*. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{n=k}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{\cos \frac{k}{4n}}{k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k}.$$