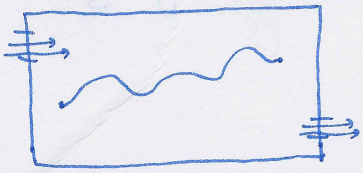
10. X. 2012

Ćwiczenia czw. 14:15, s. 5050

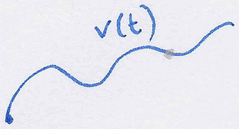
Napisać program, który liczy trajektorię w czasie



(dany punkt albo kupka punktów)

Czas: 5. II. 2013

Ruch punktu: Obserwator wewnętrzny + obserwator zewnętrzny



v(t)

x(t)

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

$$x(0) = y$$

$$\boxed{\frac{d\,x(t,y)}{dt} = v(t,x)}$$
$$x(0,y) = y$$

jednoznaczność: $v \in L_1(0,T; W^1_\infty(\Omega))$

$$x(t,y) = y + \int_0^t v(t', x(t',y))\,dt'$$

(y,t) – wsp. Lagrange'a (koszmarnie skompikowane)

$\updownarrow$

(x,t) – wsp. Eulera (obserwatora zewnętrznego)

$$u(t,y) = v(t, x(t,y))$$

$$D_y x(t,y) = Id + \int_0^t D_y u(t',y)\,dt' = Id + \int_0^t D_x v(t', x(t',y)) \cdot \frac{dx(t',y)}{dy}\,dt'$$

Dlaczego te współrzędne są naturalne?

$$\frac{du}{dt}(t,y) = \frac{d}{dt} v(t, x(t,y)) = v_t + \nabla_x v\,(t, x(t,y)) \cdot \frac{d\,x(t,y)}{dt} =$$
$$= v_t + v \cdot \nabla_x v$$

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + v\nabla$$

(t,y) $\quad$ (t,x)

pochodna substancjalna, materialna, transportu, śledcza.

Równania N-S:

$$\boxed{v_t + v \cdot \nabla v} - \Delta u + \nabla p = 0$$
$$\operatorname{div} u = 0$$

Podstawowe modele:

0. Równanie ciągłości

$$\varrho_t + \operatorname{div}(\varrho u) = 0$$ dane pole wektorowe i szukamy ϱ

$$\frac{d}{dt}\int_D \varrho\, dx = -\int_{\partial D} v\cdot n \varrho\, d\sigma = -\int_D \operatorname{div}(\varrho v)\, dx$$

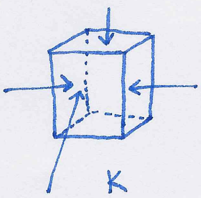
$$\frac{d}{dt}\int_D \varrho = \int_D \varrho_t$$

$$\int_D (\varrho_t + \operatorname{div}(\varrho v))\, dx = 0$$

$\varrho \equiv 1 \Rightarrow \operatorname{div} v = 0$ warunek nieściśliwości

$\varrho_t + v\nabla\varrho = 0$, czyli można rozważać płyn nieściśliwy o zmiennej gęstości

Równania Eulera



K

$$-\int_{\partial K} \vec{n} p\, d\sigma = -\int_K \nabla p\, dx$$

$$\varrho \dot{v} = -\nabla p$$

$$\varrho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p$$

$\varrho v_t + \varrho v \nabla v + \nabla p = 0$ – równ. Eulera bezdywergentne

$\operatorname{div} v = 0$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varrho v^2\, dx = 0$$

Dyssypacja energii

$$\begin{cases} \varrho v_t + \varrho v \nabla v - \nu\Delta v + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \varrho = ct. \end{cases}$$ Równania Naviera - Stokesa

$$-\nu\Delta v + \nabla p = -\operatorname{div} T(v,p) = -\operatorname{div} S(v) + \nabla p$$

$$S(v) = \frac{1}{2}\nu(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

Interesuje nas:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Układ Stoke'sa

$\operatorname{rot} u = 0$
$u = \nabla \varphi$
$\Delta \varphi = "0"$

Równania N-S

$$\begin{cases} u_t + u\nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Przyp: $\left[(u\cdot\nabla)u\right]^1 = \sum_{k=1}^{d} u^k \partial_{x_k} u^1$, $u: \Omega \to \mathbb{R}^d$

$$\int_\Omega (u\cdot\nabla)u\cdot u = \sum \int_\Omega u^k \partial_k u^l \cdot u^l = \sum \frac{1}{2}\int_\Omega u^k \partial_k (u^l)^2 = \sum -\frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_k u^k)(u_l)^2 = 0$$

Przepływ quasigeostroficzny:

$$\theta_t + u\cdot\nabla\theta + (-\Delta)^\alpha \theta = 0 \qquad \mathbb{R}^2$$

$$u = (R_2\theta - R_1\theta) \quad ; \quad \hat{R}_k = \frac{i\xi_k}{|\xi|}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Najprostsze podejście: $H^s(\mathbb{R}^d)$ - przestrzeń Sobolewa, $s \in \mathbb{R}$

$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\hat{u} = \mathcal{F}u = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x)\,dx$$

$$\check{v} = \mathcal{F}^{-1}v = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} v(\xi)\,d\xi$$

Na potrzeby wykładu $\|u\|_{L_2} = \|\hat{u}\|_{L_2}$

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L_2}$$

Podstawowe własności:

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad s > \frac{d}{2}$$

$$Tr_{x_d=0}\, H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1}), \quad s > \frac{1}{2}$$

Policzymy równanie ciepła:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & w \quad \mathbb{R}^d \times (0,T) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Tw. $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, to $u_t, D^2 u \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$

Rozważamy dwa problemy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & w \quad \mathbb{R}^d \times (0,T) \\ u|_{t=0} = 0 & w \quad \mathbb{R}^d \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^d \times (0,T) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$