17. X. 2012

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{w } \mathbb{R}^d \times (0,T) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Tw. $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, to $u_t, \nabla^2 u \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$

$$\|u_t, \nabla^2 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \times (0,T))} \leq C\left(\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))} + \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\right)$$

Rozbijamy na dwa równania:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Załóżmy, że $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^n \times (0,T)$ zwarty

$\bar{u}_t - \Delta \bar{u} = \bar{f}$ w $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ Ozn: $\bar{\cdot}$ będzie oznaczało wszędzie

$\vec{u} \to 0$, $t \to -\infty$ rozszerzenie przez 0.

Rozwiązujemy: Istnienie metody Galerkina

$$\bar{u}^N(t) = \sum_k a_k^N(t)\, \omega^k(x)$$

Mnożymy równanie przez $\bar{u}$ i całkujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \bar{u}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}\bar{u}\, dx$$

Całkujemy po t:

$$\underbrace{\|\bar{u}(T)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2\int_{-\infty}^{T} \|\nabla \bar{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}_{} = 2\int_{-\infty}^{T}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}\bar{u}\, dx$$

Przestrzeń zdefiniowaną przez to oznaczamy $V^{1,0}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}(t)\|^2_{L_2} \leq \|\bar{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\bar{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\|\bar{u}\|_{L_2} \cdot \frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{L_2} \leq \|\bar{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\bar{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}(t)\|_{L_2} \leq \|\bar{f}(t)\|_{L_2}$$

czyli po scałkowaniu

$$\|\bar{u}(T)\|_{L_2} \leq \int_{-\infty}^{T} \|\bar{f}(t)\|_{L_2} dt$$

dla $T<0$ prawa strona $=0$, czyli $\bar{u} \equiv 0$ $t<0$.

Definiujemy

$$v = \mathcal{F}_{x,t}\bar{u} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} e^{-i(\xi x + \xi_0 t)} \bar{u}(x,t)\,dx\,dt$$

$$(i\xi_0 + |\xi|^2)v = \mathcal{F}\bar{f}$$

$$v = \frac{\mathcal{F}\bar{f}}{i\xi_0 + |\xi|^2}$$ – ta funkcja jest gładka

Zauważmy, że

$$i\xi_0 v = \frac{i\xi_0}{i\xi_0 + |\xi|^2}\mathcal{F}\bar{f}$$

$$\|$$

$$(\partial_t \bar{u})^\wedge$$

$$\|\partial_t \bar{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})} = \|i\xi_0 v\|_{L_2} = \left\|\frac{i\xi_0}{i\xi_0 + |\xi|^2}\mathcal{F}\bar{f}\right\|_{L_2} \leq \|\mathcal{F}\bar{f}\|_{L_2} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})}$$

$$-\xi_k \xi_l v = \frac{-\xi_k \xi_l}{i\xi_0 + |\xi|^2}\mathcal{F}f$$

$$\|$$

$$\|\partial_k \partial_l \bar{u}\|_{L_2} = \left\|\frac{\xi_k \xi_l}{i\xi_0 + |\xi|^2}\mathcal{F}\bar{f}\right\| \leq \|f\|_{L_2}$$

Gdybyśmy wiedzieli wszystko o

$$\tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = \tilde{f}$$

$$\tilde{f}|_{\mathbb{R}^d \times (0,\infty)} = f$$

wtedy po odjęciu

$$u_t - \Delta u = f$$

$$u|_{t=0} = u_0$$

umielibyśmy sobie poradzić z

$$(u-\tilde{u})_t - \Delta(u-\hat{u}) = 0$$

$$(u-\tilde{u})|_{t=0} = u_0 - \tilde{u}|_{t=0}$$

Praca domowa: zrobić to samo dla transformaty Laplace'a

$$\mathcal{F}_\gamma \to e^{-(\gamma + i\xi_0)t}$$

mamy oszacowania $u_t, \nabla^2 u$ wywnioskować

$$u|_{t=0} \in H^1$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \qquad u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow u_t, \nabla^2 u \in L_2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$$

Dowód: Transformata po przestrzeni:

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$$

$$\widehat{\partial_k \partial_l u} = -\xi_k \xi_l \hat{u} = -\xi_k \xi_l e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$$

$$\| \xi_k \xi_l e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) \|^2_{L_2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))} = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_k \xi_l|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_k \xi_l| \frac{1}{2|\xi|^2} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |\xi|^2 |\hat{u}_0|^2 = \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2_{L_2}$$

Mnożymy równanie i całkujemy po czaso-przestrzeni

$$\int_{\mathbb{R}^d \times (0,\infty)} u_t^2 \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^d \times (0,\infty)} \nabla u \nabla u_t = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2_{L_2} + \|u_t\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))} = 0$$

WPROWADZENIE DO RÓWNAŃ NAVIERA-STOKESA

Będziemy się głównie zajmować przypadkami, gdy

$$\Omega = \mathbb{R}^d, \quad d = 2,3$$

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = 0 \qquad [f]$$

$$\left[-\mu \Delta v + \nabla p = -\operatorname{div} \mathbb{T}(v,p) = -\operatorname{div}\left(\frac{\mu}{2} (\nabla u + \nabla u^T) - pI \right) \right]$$

$$\operatorname{div} v = 0$$

$$v|_{t=0} = v_0$$

CEL: Istnienie

(I) Istnienie słabych rozwiązań NS

chcemy pokazać, że

$v \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T; H^1(\Omega))$

Mówimy, że v jest słabym rozwiązaniem NS $(f \equiv 0)$ wtw gdy $v \in L_2(0,T; H^1(\Omega))$ oraz jest spełniona następująca tożsamość całkowa

$$-\int_0^T \int_\Omega v \phi_t \, dx dt - \int_0^T \int_\Omega (v \otimes v) : \nabla \varphi \, dx dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx dt =$$

$$= \int_\Omega v_0 \phi(x,0) \, dx$$

$\varphi \in C^\infty(\Omega \times [0,T))$, $\operatorname{div} \varphi = 0$

$\operatorname{supp} \varphi$ zwarty

<u>Pytanie:</u> $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $\operatorname{div} \varphi = 0$. Czy istnieje ciąg φ_k: $\operatorname{supp} \varphi_k$ jest zwarty, $\operatorname{div} \varphi_k = 0$ i $\varphi_k \to \varphi$ w C^k?

$$\begin{cases} v_t + v \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

φ: $\operatorname{div} \varphi = 0$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} v_t \cdot \varphi \, dt \, dx = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} v \varphi_t \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} v_0 \varphi(x,0) \, dx$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla v \, \varphi \, dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(v \otimes v) \varphi \, dx = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (v \otimes v) : \nabla \varphi \, dx dt$$

$$\int \nabla p \, \varphi = -\int p \operatorname{div} \varphi = 0$$

$$\int -\mu \Delta v \, \varphi = \mu \int \nabla v \nabla \varphi$$